

NUMERISCHE BEHANDLUNG VON VERZWEIGUNGSPROBLEMEN
BEI RANDWERTAUFGABEN GEWÖHNLICHER
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des Grades

"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz

HELMUT WEBER

geb. in Wiesbaden

Mainz 1978



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552618_0067

NUMERISCHE BEHANDLUNG VON VERZWEIGUNGSPROBLEMEN
BEI RANDWERTAUFGABEN GEWÖHNLICHER
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

D I S S E R T A T I O N
zur Erlangung des Grades

"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz

HELMUT WEBER
geb. in Wiesbaden

Mainz 1978



Berichterstatter:

Prof. Dr. W. Börsch-Supan, Mainz

Prof. Dr. H.N. Mülthei, Mainz

Datum der mündlichen Prüfung: 15.12.1978

INHALT

0	Einleitung	1
1	Einführung in die Problematik	
1.1	Ein Beispiel	5
1.2	Verzweigungstheorie	8
1.3	Sekundäre Verzweigung	14
1.4	Ein Überblick über numerische Verfahren für Verzweigungsprobleme gewöhnlicher Randwertaufgaben	24
2	Verfahren zur numerischen Behandlung von Verzweigungsproblemen gewöhnlicher Randwertaufgaben im Fall einfacher Eigenwerte	
2.1	Aufgabenstellung	27
2.2	Transformation in eine reguläre Randwertaufgabe	29
2.3	Diskretisierungsverfahren für Randwertaufgaben	
2.3.1	Differenzenverfahren	34
2.3.2	Die Trapezregel	36
2.3.3	Shooting - Verfahren	38
2.4	Anwendung der Diskretisierungsverfahren und Fragen der Anfangsnäherung	40
2.5	Ein Iterationsverfahren	45
2.6	Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen	49
2.7	Auswirkungen von Störungen in λ_0 und φ	51
2.8	Verfolgung von Zweigen	56
3	Hopfsche Verzweigung und der Fall mehrfacher Eigenwerte	
3.1	Ein allgemeineres Problem	60
3.2	Numerische Behandlung der Hopfschen Verzweigung	64
3.3	Verzweigung bei mehrfachen Eigenwerten	68

4	Gestörte Verzweigung und numerische Behandlung	
4.1	Motivation und Problemstellung	74
4.2	Nichtisolierte Lösungen	78
4.3	Lösungszeige durch nichtisolierte Lösungen	82
5	Numerische Behandlung sekundärer Verzweigung	
5.1	Bemerkungen zur Problematik	85
5.2	Berechnung des Verzweigungspunktes und der Nullvektoren	
5.2.1	Endlichdimensionaler Fall	87
5.2.2	Unendlichdimensionaler Fall, Randwertaufgaben	94
5.3	Bestimmung von Zweigen durch den Verzweigungspunkt bei Randwertaufgaben	100
6	Numerische Resultate	
6.1	Zur Auflösung der auftretenden linearen Gleichungssysteme	102
6.2	Beispiel 1 - Stabknickung	103
6.3	Beispiel 2 - Hopf - Bifurkation: Feedback - Inhibition - Oszillator	115
6.4	Beispiel 3 - Gestörte Bifurkation	119
6.5	Beispiel 4 - Behandlung sekundärer Verzweigung	126
7	Literaturverzeichnis	134

0 EINLEITUNG

Bei der mathematischen Beschreibung vieler Vorgänge in Natur und Technik stößt man auf Verzweigungsprobleme. Wir nennen kurz einige Beispiele:

Elastizitätstheorie (Stabknickung, Plattenbeulung),
Hydrodynamik (Taylor - Problem, Bénard - Problem),
Neutronentransporttheorie,
chemische Reaktionen,
nichtlineare Wärmeleitungsvorgänge,
periodische Bewegungen in der Himmelsmechanik,
Spektrum des Helium - Atoms (Hartree - Gleichung),
Supraleitfähigkeit.

Diese - sehr unvollständige - Übersicht mag einen Eindruck von der praktischen Wichtigkeit der Behandlung von Verzweigungsproblemen geben. Theoretische Untersuchungen dieser Probleme mit Hilfe analytischer und topologischer Methoden sind in den letzten zwei Jahrzehnten in großer Vielfalt durchgeführt worden und haben auf manchen Gebieten zu abschließenden Resultaten geführt. Ganz anders sieht es bei der numerischen Behandlung von Verzweigungsproblemen aus. Hier sind erst in den letzten Jahren (WEISS [1] (1975), RHEINBOLDT [1] (1978), LANGFORD [1] (1977), SEYDEL [1] (1977), ATKINSON [1] (1978), SCHEURLE [1] (1977), KELLER [3] (1977)) Methoden entwickelt worden, die den speziellen Schwierigkeiten, die bei der numerischen Lösung von Verzweigungsproblemen in der Nähe des kritischen Punktes entstehen, (teilweise) Rechnung tragen.

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der numerischen Behandlung von Verzweigungsproblemen bei Randwertaufgaben (RWA'n) von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen sowie - kürzer - mit Problemen in Banachräumen.

Kapitel 1 gibt nach der Behandlung eines Beispiels

einen Überblick über Ergebnisse der analytischen Verzweigungstheorie. In Abschnitt 1.3 beweisen wir eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von CRANDALL & RABINOWITZ [1]. Wir gehen dabei im Gegensatz zu den genannten Autoren von der prinzipiellen Gleichberechtigung der beiden sich schneidenden Lösungskurven aus und erhalten ein Kriterium für Verzweigung, das uns später, in Kapitel 5 zur numerischen Bestimmung von sekundären Verzweigungspunkten, sehr von Nutzen sein wird. Abschnitt 1.1 gibt einen Abriß der bisher bekannten numerischen Verfahren für unsere Probleme.

In Kapitel 2 wird die zu behandelnde RWA vorgestellt und eine Transformation in eine reguläre Aufgabenstellung angegeben, die mit Hilfe einer Uparametrisierung der nicht-trivialen Lösung bewirkt, daß man sich nur noch auf dem interessierenden Zweig bewegt und daß keine numerischen Schwierigkeiten bei der Anwendung von Standardverfahren auf diese neue RWA auftreten. Die Wurzeln dieser Vorgehensweise liegen in der Theorie von SCHMIDT und LJAPUNOV und den Arbeiten von KELLER & LANGFORD [1], CRANDALL & RABINOWITZ [1]. In 2.5 betrachten wir eine Modifikation unserer Methode, die auf eine Realisierung des Iterationsverfahrens von LANGFORD [2] hinausläuft. Abschnitt 2.6 gibt eine Möglichkeit der numerischen Berechnung der Eigenfunktion und des Eigenwertes des linearisierten Problems an. Diese Größen werden für unser Verfahren benötigt und können nicht in allen Fällen analytisch bestimmt werden. 2.7 untersucht die Auswirkung der hierbei gemachten Fehler auf das Endergebnis. Die Weiterverfolgung von Zweigen und die Behandlung von sogenannten Umkehrpunkten mit ähnlichen Methoden wird in 2.8 beschrieben.

Kapitel 3 behandelt verwandte Probleme, die praktisch sehr wichtige Hopf - Verzweigung und die Verzweigung bei mehrfachen Eigenwerten der Linearisierung. Im letzteren Fall kann man unter den bekannten Voraussetzungen über Lösungen der algebraischen Bifurkationsgleichungen ebenfalls Lösungszweige mit Hilfe einer dort definierten RWA konstruieren.

In Kapitel 4 werden Möglichkeiten der numerischen Behandlung von gestörten Verzweigungsproblem beleuchtet. In diesem gestörten Fall tritt im allgemeinen gar keine echte Verzweigung auf. Es treten jedoch neue Probleme auf, die wir, ganz im Sinne der Theorie KEENER's (KEENER & KELLER [1]) mit ähnlichen Methoden wie in Kap. 2 behandeln.

Kapitel 5 untersucht das Problem der numerischen Behandlung sekundärer Verzweigung. Man ist dabei zusätzlich durch das Fehlen einer explizit bekannten primären Lösungskurve (sonst ist dies die triviale Lösung) gehandikapt. Das Problem wird zerlegt in zwei Teilprobleme: die Bestimmung des Verzweigungspunktes und zweier zugehöriger Nullvektoren der Linearisierung, und zweitens: die Berechnung beider sich schneidender Lösungskurven in der Nähe des Verzweigungspunktes (wir behandeln auch hier den Fall eines "einfachen" Eigenwertes). Das Problem der Bestimmung des Verzweigungspunktes konnten wir auf ein konvexes, unrestrictiertes Optimierungsproblem zurückführen, also ein Problem, das mit Standard - Abstiegsverfahren genau gelöst werden kann. Kennt man damit den Verzweigungspunkt und die Nullvektoren genau, so läßt sich wieder eine RUA konstruieren, durch deren isolierte Lösungen sich die Lösungen des Verzweigungsproblems in der Nähe des Verzweigungspunktes erzeugen lassen.

In Kapitel 6 präsentieren wir Ergebnisse der gerechneten Beispiele. Zur numerischen Behandlung wurden die Trapezregel mit Extrapolation und das Shooting - Verfahren (in Verbindung mit dem Levenberg - Marquardt - Algorithmus) verwandt. Die hohe Genauigkeit unserer Ergebnisse und die konzeptionelle Einfachheit unserer Vorgehensweisen läßt hoffen, daß diese Arbeit auch einen Beitrag zur praktischen Behandlung solcher Probleme liefern wird.

Zur Notation: die Formeln sind innerhalb der Kapitel durchnumeriert, bei Verweisen von anderen Kapitels aus bedeutet (k.1): Formel 1 in Kapitel k.

Herrn Prof. Dr. W. Börsch - Supan danke ich für die Anregung zur Beschäftigung mit Verzweigungsproblemen und viele Diskussionen, die manche Ergebnisse der Arbeit sehr gefördert sowie zur Klarheit der Darstellung beigetragen haben.

1 EINFÜHRUNG IN DIE PROBLEMATIK

1.1 EIN BEISPIEL

Bei der mathematischen Formulierung und Lösung vieler Probleme aus Physik, Biologie und Chemie tritt das Phänomen der Lösungsverzweigung oder Bifurkation auf. Wir wollen hier ein Beispiel aus der Elastizitätstheorie betrachten, dessen Verzweigungsverhalten schon früh (Euler, Bernoulli, Lagrange) untersucht worden ist. Abb. 1.1 zeigt einen dünnen, homogenen, elastischen

Abb. 1.1



Stab, dessen linkes Ende fixiert ist und dessen rechtes Ende sich in Richtung der x -Achse frei bewegen kann. In unbelasteten Zustand füllt der Stab gerade das Intervall $[0, 1]$ der x -Achse aus. Wird der Stab durch eine Kraft P in negativer x -Richtung belastet, so ist ein möglicher Zustand der reinen Kompression. Im Experiment stellt man jedoch für hinreichend großes P transversale Auslenkungen des Stabes fest. Wie nehmen an, daß diese "Knickung" oder "Beulung" in der x - y -Ebene stattfindet. Der Zustand des Stabes wird beschrieben durch die Bogenlänge s , gemessen vom linken Ende, den Winkel $\theta(s)$ zwischen der Tangente an den geknickten Stab und der x -Achse und durch seine Verschiebungen $u(s)$ und $v(s)$ in x - bzw. y -Richtung. Unter bestimmten physikalischen Voraussetzungen (siehe STAKGOLD [1]) erhält man folgendes System von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen für θ , u und v :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= -\lambda v \\ (1a) \quad \frac{dv}{ds} &= \sin \theta \\ \frac{du}{ds} &= \cos \theta - 1 \end{aligned}$$

mit Randbedingungen

$$(1b) \quad v(0) = v(1) = u(0) = 0,$$

wobei $\lambda = P/e$, e physikalische Konstante. Die linearisierte Version von (1) für kleine θ , v und u ist

$$\frac{d\theta}{ds} = -\lambda v$$

$$(2) \quad \frac{dv}{ds} = \theta$$

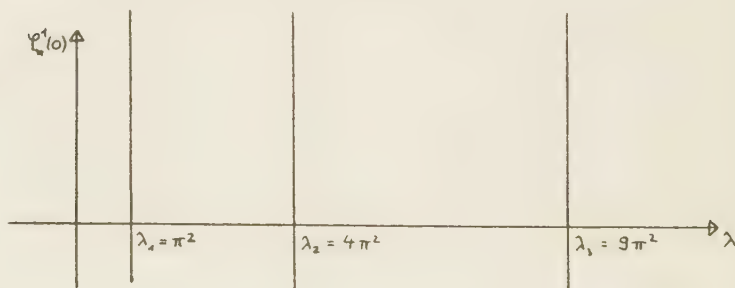
$$\frac{du}{ds} = 0$$

mit Randbedingungen (1b). (2) hat die Eigenwerte $\lambda_n = n^2 \pi^2$, $n \in \mathbb{N}$ und Eigenfunktionen

$$\varphi_n(s) = c \cdot (\cos n\pi s, \frac{1}{n\pi} \sin n\pi s, 0)^T, \quad c \in \mathbb{R}.$$

In Abb. 1.2 ist $\varphi_n'(0)$ über λ aufgetragen.

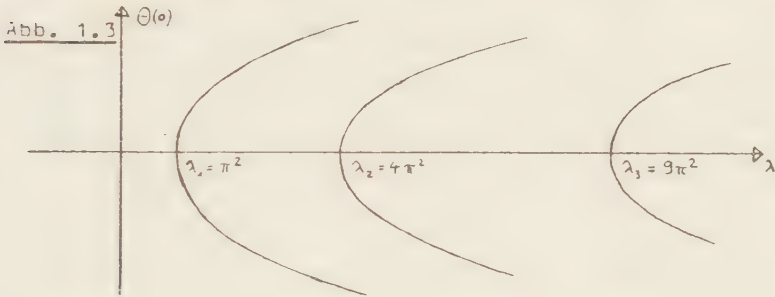
Abb. 1.2



Für Lasten unterhalb $P_1 = \pi^2 e$ ist keine Knickung möglich. Bei P_1 kann Knickung in der Form $c \cdot \varphi_1$ auftreten, aber die Amplitude der Auslenkung ist unbestimmt. Wenn die Last P_1 überschreitet, ist nur noch die Ruhelage möglich, bis $P_2 = 4 \pi^2 e$ erreicht ist u.s.w. Knickung ist nur an den kritischen Werten P_n möglich. Diese linearisierte Theorie ist natürlich unbefriedigend, weil sie nicht mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmt.

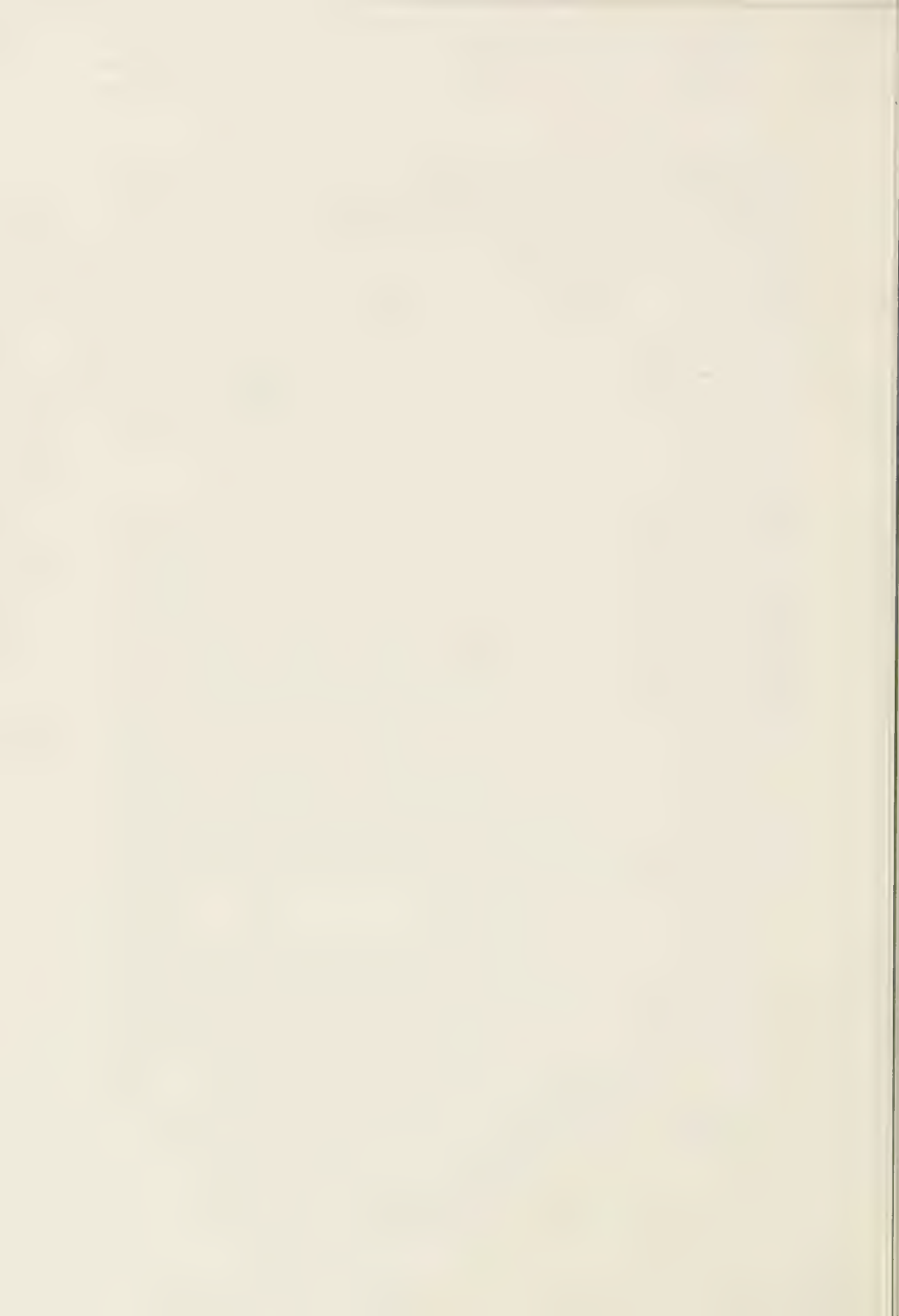
Die nichtlineare Randwertaufgabe (RWA) (1) liefert eine vernünftiger Beschreibung der auftretenden Phänomene. (1) kann

mit Hilfe elliptischer Funktionen explizit gelöst werden (STAKGOLD [1]). Abb. 1.3 zeigt das daraus resultierende "Verzweigungsdiagramm". Für $\lambda = \lambda_1$ gibt es nur die triviale



Lösung, für $\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_2$ sind drei Lösungen möglich, für $\lambda_2 < \lambda \leq \lambda_3$ fünf Lösungen etc. Um festzustellen, welche Lösung sich für $\lambda > \lambda_1$ einstellen wird, muß man die jeweils zugehörige potentielle Energie berechnen. Es zeigt sich (REISS [1]), daß die Lösungen minimaler potentieller Energie auf dem bei $\lambda_1 = \pi^2$ bifurkierenden Zweig liegen. In Kap. 6 präsentieren wir numerische Ergebnisse für das hier angesprochene Stabknickungsproblem.

Bevor wir uns mit der numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen befassen, bei denen Verzweigung auftritt, geben wir einige Resultate aus der analytischen Verzweigungstheorie an, die uns später von Nutzen sein werden.



Hilfssatz 1.1

Vor.: (i) $F: \mathbb{R} \times B_1 \rightarrow B_2$ zweimal stetig Fréchet - differenzierbar,

(ii) $(\lambda_0, 0)$ Verzweigungspunkt.

Beh.: $F_u(\lambda_0, 0)$ ist kein Homöomorphismus.

Beweis: Es existiert eine Folge $(\lambda^n, u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $(\lambda^n, u^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\lambda_0, 0)$, $\|u^n\|_1 \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $F(\lambda^n, u^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann ist

$$0 = F(\lambda^n, u^n) = F_u(\lambda^n, 0)u^n + R(\lambda^n, u^n) \quad \text{mit} \quad \frac{\|R(\lambda, u)\|_2}{\|u\|_1} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

oder

$$0 = F_u(\lambda_0, 0)u^n + (\lambda^n - \lambda_0) \int_0^1 F_{u\lambda}(\lambda_0 + t(\lambda^n - \lambda_0), 0) dt \cdot u^n + R(\lambda^n, u^n).$$

Setze $z^n := u^n / \|u^n\|_1$. Damit ist $F_u(\lambda_0, 0)z^n = f_n$ mit $\|f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Hätte $F_u(\lambda_0, 0)$ eine beschränkte Inverse, so wäre

$$\|z^n\|_1 \leq \|F_u(\lambda_0, 0)^{-1}\|_{2,1} \|f_n\|_2,$$

was wegen $\|z^n\|_1 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $\|f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ nicht möglich ist.

q.e.d.

Hinreichende Bedingungen für Verzweigung sind nur in speziellen Fällen relativ einfach zu formulieren und nachzuprüfen, so im Fall "einfacher" Eigenwerte.

Definition 1.2 (CRANDALL & RABINOWITZ [1])

Seien $T, K \in L(B_1, B_2)$, dh. stetige lineare Operatoren. Dann heißt $\mu \in \mathbb{R}$ K-einfacher Eigenwert von T, falls

$$(5a) \quad \dim N(T - \mu K) = \text{codim } R(T - \mu K) = 1$$

und, falls $N(T - \mu K) = \text{span}\{\varphi\}$,

$$(5b) \quad K\varphi \notin R(T - \mu K).$$

Dabei bezeichnet N den Nullraum und R den Wertebereich eines linearen Operators.

Satz 1.1

- Vor.: (i) B_1, B_2 reelle Banachräume, V offene Umgebung von 0 in B_1 ,
(ii) $F: \mathbb{R} \times B_1 \rightarrow B_2$ zweimal stetig Fréchet - differenzierbar mit $F(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
(iii) für $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sei Null $F_{\lambda u}(\lambda_0, 0)$ - einfacher Eigenwert von $F_u(\lambda_0, 0)$,
(iv) Z sei Komplement von $N(F_u(\lambda_0, 0)) = \text{span}\{\psi\}$ in B_1 .

Beh.: Es existieren ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und stetig differenzierbare Funktionen $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: I \rightarrow Z$ mit $\lambda(0) = \lambda_0$, $\psi(0) = 0$ und

$$F(\lambda(\varepsilon), u(\varepsilon)) = 0 \quad \forall \varepsilon \in I,$$

wobei $u(\varepsilon) = \varepsilon \psi + \varepsilon^2 \chi(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in I$. $F^{-1}(0)$ nahe $(\lambda_0, 0)$ besteht genau aus den Kurven $(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $(\lambda(\varepsilon), u(\varepsilon))$, $\varepsilon \in I$.

Ein eleganter Beweis von CRANDALL & RABINOWITZ [1] benutzt das Theorem über implizite Funktionen im Banachraum, das wir - auch für späteren eigenen Gebrauch - hier zitieren.

Satz 1.2

Vor.: B_1, B_2 und B_3 seien reelle Banachräume, f eine stetige Abbildung einer offenen Teilmenge A von $B_1 \times B_2$ nach B_3 . Sei $A_x := \{y \in B_2 \mid (x, y) \in A\}$. Die Abbildung $y \mapsto f(x, y)$ von A_x nach B_3 sei differenzierbar für jedes $x \in B_1$ mit $A_x \neq \emptyset$. Die Ableitung f_y sei stetig auf A . Sei $(x_0, y_0) \in A$ mit $f(x_0, y_0) = 0$. $f_y(x_0, y_0)$ sei ein linearer Homöomorphismus von B_2 auf B_3 .

Beh.: Es existieren Umgebungen U von x_0 , V von y_0 , $U \subset B_1$, $V \subset B_2$, so daß gilt:

- (i) $U \times V \subset A$,
- (ii) es gibt genau eine stetige Funktion $u : U \rightarrow V$ mit $f(x, u(x)) = 0$ für alle $x \in U$,
- (iii) $f_y(x, u(x))$ ist ein linearer Homöomorphismus von B_2 auf B_3 , $x \in U$,
- (iv) falls f k -mal stetig differenzierbar ist auf A , so gilt: u ist k -mal stetig differenzierbar auf U .

Beweis: siehe DIEUDONNÉ [1], S. 265.

Nach Satz 1.1 erhält man die Lösung, parametrisiert nach ε , der Amplitude der Projektion auf $N(F_U(\lambda_0, 0))$. Dies ist wesentlich, denn erst diese Parametrisierung ermöglicht es in vielen Fällen erst, zu vernünftigen Ergebnissen zu kommen, denn eine Parametrisierung nach λ ist häufig nicht adäquat (siehe CRANDALL & RABINOWITZ [1]).

Beispiel: (aus CRANDALL & RABINOWITZ [1])

$$(6) \quad F(\lambda, u) = -u'' + h(u^2 + u'^2)u' - \lambda u = 0$$

mit $h(0) = 0$, $B_1 = \{u \in C^2[0, \pi] \mid u(0) = u(\pi) = 0\}$, $B_2 = C[0, \pi]$.

Sei $Lu := -u''$. B_1 wird mit der Graphennorm

$$\|u\|_G := \|u\| + \|Lu\|, \quad$$

$\|\cdot\|$ Maximumnorm in $C[0, \pi]$ ($= B_2$) versehen. Man hat dann $F_U(\lambda_0, 0) = L - \lambda_0 I$, $\lambda_0 = 1$, $N(L - \lambda_0 I) = \text{span}\{\varphi\}$, $\varphi(t) = \sin t$.

Um die eindeutig bestimmte Kurve, die in $(\lambda_0, 0)$ abzweigt, zu finden, verwendet man den Ansatz $u(\varepsilon) = \varepsilon \varphi$. Einsetzen in (6) liefert

$$1 + h(\varepsilon^2) - \lambda(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \lambda(\varepsilon) = 1 + h(\varepsilon^2).$$

Durch geeignete Wahl von h erhält man leicht Beispiele, die zeigen, daß eine Parametrisierung nach λ nicht angemessen zu sein braucht (CRANDALL & RABINOWITZ [1]). Aber auch bei weniger pathologischer Wahl von h , z.B. $h(\varepsilon) = \varepsilon$ zeigen sich charakteristische Schwierigkeiten: es folgt hier

$$\lambda(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 \quad \varepsilon_{\pm} = \pm \sqrt{\lambda-1}.$$

In der Nähe von λ_0 ist die Eindeutigkeit verletzt. Die große Empfindlichkeit der Lösung in Abhängigkeit von λ spiegelt sich wieder in

$$\frac{d\varepsilon_{\pm}}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = \pm \infty.$$

Unabhängig von Parametrisierungsfragen besteht immer eine weitere Schwierigkeit, wenn man u in Abhängigkeit von λ berechnet, die der schlechten Kondition in der Nähe des Verzweigungspunktes.

Satz 1.3

Vor.: (i) Voraussetzungen von Satz 1.1,
(ii) $K \in L(B_1, B_2)$, Null sei K -einfacher Eigenwert von $F_u(\lambda_0, 0)$.

Beh.: Es existieren offene Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 \in I_1$, $0 \in I_2$ und C^1 -Funktionen $\gamma: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v: I_1 \rightarrow B_1$, $w: I_2 \rightarrow B_2$ mit

$$(7) \quad F_u(\lambda, 0)v(\lambda) = \gamma(\lambda)Kv(\lambda) \quad \forall \lambda \in I_1,$$

$$(8) \quad F_u(\lambda(\varepsilon), u(\varepsilon))w(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)Kw(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in I_2$$

und $\gamma(\lambda_0) = \mu(0) = 0$, $v(\lambda_0) = \varphi = w(0)$. Ferner gilt $v(\lambda) - \varphi \in Z$, $w(\varepsilon) - \varphi \in Z$ und $\gamma'(\lambda_0) \neq 0$.

Beweis: CRANDALL & RABINOWITZ [2].

Für unsere Anwendungen ist der Fall $B_1 \subset B_2$, der bei Differentialgleichungsproblemen häufig auftritt, von besonderem Interesse. Falls wir dort $K = i$ (i sei die natürliche Injektion von B_1 in B_2) wählen dürfen, so haben wir es in (8) mit normalen Eigenwertaufgaben, anstelle von verallgemeinerten mit $K \neq i$, zu tun. Wegen der Stetigkeit von μ hat die Linearisierung von F bezüglich u auf dem nichttrivialen Zweig in der Nähe von $(\lambda_0, 0)$ einen kleinen Eigenwert, dh. die Kondition der Bestimmung von u bei festem $\lambda \approx \lambda_0$ ist schlecht.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn wir die Lösung in Abhängigkeit von ϵ in der Form

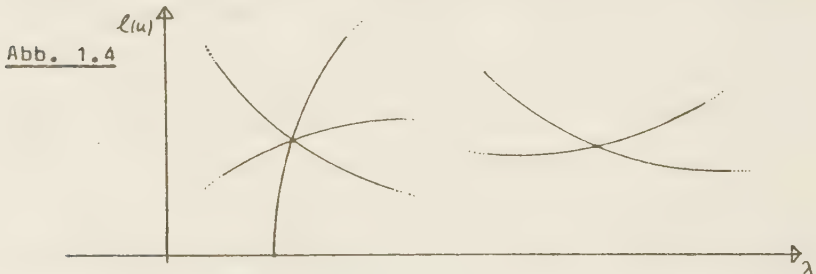
$$(9) \quad (\lambda(\epsilon), u(\epsilon)) = (\lambda_0, \epsilon\varphi + \epsilon^2\psi(\epsilon))$$

darstellen und - bei bekannt vorausgesetztem λ_0 und φ - $\lambda(\epsilon)$ und $\psi(\epsilon)$ berechnen. Die triviale Lösung, die in der Nähe des Verzweigungspunktes steht, ist dann "ausgeblendet", und das so erzeugte neue Problem ist nach dem Theorem über implizite Funktionen dann in der Nähe von $\epsilon = 0$ regulär. Unter "regulär" wollen wir hier und in Zukunft verstehen, daß die Fréchet - Ableitung in der betrachteten Lösung ein linearer Homöomorphismus ist. Ist ein Problem oder eine lineare Abbildung nicht regulär, so bezeichnen wir es auch als singulär.

Wir wollen noch kurz auf einige konstruktive Verfahren für Verzweigungsprobleme hinweisen. Neben der Ljapunov - Schmidt - Methode (siehe z.B. STAKGOLD [1], WAINBERG & TRENOGIN [1]) gibt es eine Reihe von verwandten Iterationsverfahren, die von einer Lösungsdarstellung ähnlich (9) ausgehen: als Prototyp kann das Verfahren aus der bekannten Arbeit von KELLER & LANGFORD [1] gelten, wo auch der Fall mehrfacher Eigenwerte behandelt wird. Weiter sei auf DEMOULIN & CHEN [1], [2], WEISS [1], RHEINBOLDT [1], ATKINSON [1], KEENER & KELLER [1] hingewiesen. Auch die Arbeit von SCHRÖDER [1] (1957) ist in diesem Zusammenhang zu erwähnen. Das von KELLER & LANGFORD [1] benutzte Iterationsverfahren diente auch unseren eigenen Untersuchungen als Ausgangspunkt.

1.3 SEKUNDÄRE VERZWEIGUNG

Wie schon angedeutet, kann Verzweigung auch von nicht-trivialen Lösungen von (3) aus erfolgen, z.B. kann sich eine von der trivialen Lösung abgezweigte Lösung weiter verzweigen. Man spricht in solchen Fällen von sekundärer Verzweigung (sekundärer Bifurkation) oder auch ganz allgemein von Verzweigung (branching). Zwei typische Bifurkationsdiagramme sind in Abb. 1.4 dargestellt. $\ell(u)$ bezeichnet dabei ein Funktional von u , z.B. $\ell(u) = \|u\|_1$. Oft wird einer



der sich schneidenden Lösungszweige ausgezeichnet und primärer Zweig genannt. Durch eine einfache Transformation kann man dann die Aufgabe der Bestimmung eines vom primären Zweig bifurkierenden Zweiges auf Satz 1.1 - im Fall eines einfachen Eigenwertes - oder ein ähnliches Ergebnis zurückspielen. Dies setzt jedoch die genaue Kenntnis des primären Zweiges voraus, was in der Praxis zu großen Schwierigkeiten führt.

Häufig erscheint es deshalb sinnvoll, die sich schneidenden Zweige als gleichberechtigt zu betrachten und Mittel und Wege zu suchen, wie man - wir betrachten hier wieder den Fall einfacher Eigenwerte - beide Zweige in der Nähe des Verzweigungspunktes konstruieren bzw. deren Existenz sichern kann.

Wie in CRANDALL & RABINOWITZ [1] fassen wir beide Variable λ und u zusammen oder betrachten allgemeiner Gleichungen der

Form

$$(10) \quad F(z) = 0,$$

wobei $F: Q \rightarrow B_2$ eine hinreichend oft Fréchet - differenzierbare Abbildung sei, Q offene Teilmenge von B_1 ; B_1, B_2 reelle Banachräume.

$z^* \in Q$ sei eine Nullstelle von F :

$$F(z^*) = 0.$$

Wir interessieren uns für Nullstellen von F in der Nähe von z^* . Für den Rest von Abschnitt 1.3 soll folgendes gelten:

Voraussetzungen

Auf B_1 sei ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ definiert. Es gelte

$$(11a) \quad \dim N(F'(z^*)) = 2, \quad N(F'(z^*)) = \text{span}\{p, q\},$$

$$(11b) \quad \text{codim } R(F'(z^*)) = 1.$$

Sei $\psi \in B_2^*$, dem Dualraum von B_2 , so gewählt, daß

$$R(F'(z^*)) = \{y \in B_2 \mid \langle \psi, y \rangle = 0\},$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle : B_2^* \times B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ die duale Paarbildung bezeichnet. Wir definieren

$$(12a) \quad a_1 := \langle \psi, F''(z^*)pp \rangle, \quad a_2 := \langle \psi, F''(z^*)pq \rangle, \quad a_3 := \langle \psi, F''(z^*)qq \rangle.$$

Es gelte

$$(12b) \quad a_1 a_3 - a_2^2 < 0.$$

Um Information über das Aussehen der Lösungen von (10) in der Nähe von z^* zu erhalten, stellen wir z nahe z^* durch eine asymptotische Entwicklung nach einem Störungsparameter ε dar:

$$(13) \quad z(\varepsilon) = z^M + \sum_{i=1}^{\infty} z_i \varepsilon^i.$$

Durch Einsetzen in

$$(14) \quad F(z) = F'(z^M)(z-z^M) + \frac{1}{2} F''(z^M)(z-z^M)(z-z^M) + R(z),$$

R Restgliedterm, und Ordnung nach ε -Potenzen erhält man unter Beachtung der Eigenschaften von R als erste Zeilen eines rekursiven Gleichungssystems für die z_i

$$(15) \quad \begin{aligned} F'(z^M)z_1 &= 0 \\ F'(z^M)z_2 &= -\frac{1}{2} F''(z^M)z_1z_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (11a) $z_1 = \alpha p + \beta q$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Notwendig für die Lösbarkeit der zweiten Gleichung von (15) ist

$$\langle \psi, F''(z^M)z_1z_1 \rangle = 0,$$

was wiederum Bedingungen an α und β stellt. Um ein Paar von Lösungen z_1 bis aufs Vorzeichen eindeutig festzulegen, kann man etwa die Normierungsbedingung $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ fordern; zwei Lösungen z_2 werden danach eindeutig durch die Forderung $(z_2, p) = (z_2, q) = 0$. Dies alles veranlaßt uns, unsere Lösungen, parametrisiert durch ε , anzusetzen als

$$(16a) \quad z(\varepsilon) - z^M = \varepsilon \{ \alpha(\varepsilon)p + \beta(\varepsilon)q \} + \varepsilon^2 v(\varepsilon)$$

mit

$$(16b) \quad \alpha(\varepsilon)^2 + \beta(\varepsilon)^2 = 1, \quad (v(\varepsilon), p) = (v(\varepsilon), q) = 0.$$

Einsetzen von (16a) in (14) liefert wegen (11a) nach Division durch ε^2 zusammen mit (16b) das nichtlineare Gleichungssystem

$$(17) \quad \begin{aligned} F'(z^M)v(\varepsilon) + \frac{1}{2} F''(z^M)[\alpha(\varepsilon)p + \beta(\varepsilon)q + \varepsilon v(\varepsilon)]^2 \\ + \frac{1}{\varepsilon^2} R(z^M + \{ \alpha(\varepsilon)p + \beta(\varepsilon)q \} + \varepsilon^2 v(\varepsilon)) &= 0 \\ \alpha(\varepsilon)^2 + \beta(\varepsilon)^2 - 1 &= 0 \\ (v(\varepsilon), p) = (v(\varepsilon), q) &= 0 \end{aligned}$$

für die zu bestimmenden Größen $v(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ und $\beta(\varepsilon)$.

Wir schreiben dabei $F''(z^*)[u]^2 := F''(z^*)uu$. (17) wird zusammengefaßt in der Form

$$(17') \quad f(x; \varepsilon) = 0$$

mit $x = x(\varepsilon) = (v(\varepsilon), \alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))$ und $f: V \times \mathbb{R} \rightarrow W$, wobei $V = \bigtimes_{i=1}^3 V_i$, $W = \bigtimes_{i=1}^4 W_i$, $V_1 = \mathbb{R}$, $V_2 = V_3 = \mathbb{R}$, $W_1 = \mathbb{R}$, $W_2 = W_3 = W_4 = \mathbb{R}$, $i=1, \dots, 4$

$$\|x\|_V = \|(x_1, x_2, x_3)\|_V = \sup_{i=1,2,3} \{\|x_i\|_{V_i}\} \text{ und } \|y\|_W = \|(y_1, y_2, y_3, y_4)\|_W = \sup_{i=1, \dots, 4} \{\|y_i\|_{W_i}\}.$$

Um (17) verwenden zu können, müssen die Lösbarkeitseigenschaften dieser Gleichung untersucht werden. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ vereinfacht sich (17) wegen $\|R(z)\|_2 = O(\|z - z^*\|_1^3)$ zu

$$(18) \quad \begin{aligned} F'(z^*)v(0) + \frac{1}{2} F''(z^*)[\alpha(0)p + \beta(0)q]^2 &= 0 \\ \alpha(0)^2 + \beta(0)^2 - 1 &= 0 \\ (v(0), p) = (v(0), q) &= 0. \end{aligned}$$

Notwendig für die Lösbarkeit von (18) ist

$$\langle \psi, F''(z^*)[\alpha(0)p + \beta(0)q]^2 \rangle = 0.$$

Daraus folgt wegen (12a) das nichtlineare Gleichungssystem

$$(19a) \quad a_1 \alpha(0)^2 + 2a_2 \alpha(0) \beta(0) + a_3 \beta(0)^2 = 0$$

$$(19b) \quad \alpha(0)^2 + \beta(0)^2 - 1 = 0$$

für $\alpha(0)$ und $\beta(0)$.

Sei $\tau := a_1 a_3 - a_2^2$ die Diskriminante der quadratischen Form (19a). Nach der Theorie der Kegelschnitte erhält man genau im Fall $\tau < 0$, d.h. wenn (19a) indefinit ist, zwei sich im Nullpunkt schneidende Geraden als Lösungen von (19a). Die Lösungen $(\alpha_i(0), \beta_i(0))^T$, $i=1, \dots, 4$ von (19) ergeben sich als Schnittpunkte der beiden Geraden mit dem Einheitskreis. Wir wählen zwei linear unabhängige davon aus und bezeichnen diese mit $(\alpha_i, \beta_i)^T$, $i=1, 2$.

Hilfssatz 1.2

Beh.: Zu $\alpha_i(0) := \alpha_i$, $\beta_i(0) := \beta_i$ ist $v_i(0)$ durch (18) eindeutig bestimmt, $i=1,2$.

Beweis: $\alpha_i(0)$ und $\beta_i(0)$ sind so gewählt, daß die erste Gleichung von (18) lösbar ist. Die Lösung $v_i(0)$ ist eindeutig bestimmt wegen der Orthogonalitätsvoraussetzungen $(v_i(0), p) = (v_i(0), q) = 0$.

q.e.d.

Um das Theorem über implizite Funktionen anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß die Fréchet - Ableitung der durch (17) definierten Abbildung $f: V \times \mathbb{R} \rightarrow W$ in $x = (v_i(0), \alpha_i(0), \beta_i(0))$ und $\varepsilon = 0$ regulär ist, d.h. wir müssen die Fréchet - Ableitung der durch (18) definierten Abbildung $f_0: V \rightarrow W$ untersuchen.

Zur Vereinfachung führen wir vorher noch eine Transformation von p und q durch.

Hilfssatz 1.3

Vor.: (p, q) werde durch

$$(20) \quad p' = \chi p + \delta q, \quad q' = \xi p + \mu q, \quad \chi\mu - \delta\xi \neq 0$$

in (p', q') transformiert. a_1', a_2', a_3' bezeichne die gemäß (12a) mit p' und q' gebildeten Größen.

Beh.: $\tau' = a_1' a_3' - a_2'^2 = (\chi\mu - \delta\xi)^2 (a_1 a_3 - a_2^2)$

Beweis: durch Verifikation.

O.B.d.A. kann man $a_1 \neq 0$ annehmen. Andernfalls vertauscht man p und q ; oder, wenn $a_1 = a_3 = 0$ ist, kann die folgende Transformation unterbleiben.

Wir transformieren (p, q) nach (20) mit

$$(21) \quad \chi = \frac{-a_2 + \sqrt{-\tau}}{a_1}, \quad \delta = 1, \quad \xi = \frac{-a_2 - \sqrt{-\tau}}{a_1}, \quad \mu = 1$$

in (p', q') . Wegen $\chi - \xi = 2\sqrt{-\tau}/a_1 \neq 0$ ist $\tau' = -4\tau^2/a_1^2 \neq 0$, und man erhält, wie leicht nachzurechnen

$$(22) \quad a_1' = 0, \quad a_2' = 2\tau/a_1, \quad a_3' = 0.$$

Der Einfachheit halber bezeichnen wir die transformierten Größen a_i' , p' , q' in Zukunft wieder mit a_i , p , q .

Nach der genannten Transformation lauten die Lösungen von (19)

$$(23) \quad \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1.$$

Hilfssatz 1.4

Vor.: $v_i := v_i(0)$ Lösung von (18) zu α_i, β_i aus (13), $i=1,2$.

Beh.: Die Lösungen $x_i = (v_i, \omega_i, \beta_i)$, $i=1,2$, von (18) sind isoliert, d.h. die Fréchet - Ableitung von f_0 in diesen Lösungen ist eine beschränkt invertierbare lineare Abbildung von V nach W .

Beweis: Unter Verwendung der bekannten Rechenregeln für Fréchet - Ableitungen von Abbildungen zwischen endlichen Produkten von Banachräumen bestimmt man die Fréchet - Ableitung $Df_0(x_i)$ und schreibt die Gleichung

$$(Df_0(x_i))h = 0, \quad h = (\tilde{v}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

komponentenweise auf:

$$F'(z^*)\tilde{v} + \tilde{\alpha}\alpha_i F''(z^*)pp + \tilde{\alpha}\beta_i F''(z^*)pq + \tilde{\beta}\alpha_i F''(z^*)pq + \tilde{\beta}\beta_i F''(z^*)qq = 0$$

$$(24) \quad 2(\tilde{\alpha}\alpha_i + \tilde{\beta}\beta_i) = 0$$

$$(\tilde{v}, p) = (\tilde{v}, q) = 0,$$

a) Wir wollen zunächst zeigen, daß die Fréchet - Ableitung injektiv ist. Damit (24) lösbar ist, muß gelten

$$\begin{aligned} (\alpha_i a_1 + \beta_i a_2)\tilde{\alpha} + (\alpha_i a_2 + \beta_i a_3)\tilde{\beta} &= 0 \\ \alpha_i \tilde{\alpha} + \beta_i \tilde{\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Mit (23) folgt für $i=1,2$: $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$. Damit bleibt

$$F'(z^*)\tilde{v} = 0, \quad (\tilde{v}, p) = (\tilde{v}, q) = 0.$$

Wie im Beweis von Hilfssatz 1.2 ergibt sich $\tilde{v} = 0$, womit die Injektivität gezeigt ist.

- b) Zur Surjektivität der Fréchet - Ableitung:
Für $i = 1$ betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} F'(z^*)\tilde{v} + \tilde{\alpha} F''(z^*)pp + \tilde{\beta} F''(z^*)pq &= x \in B_2 \\ (25) \quad 2\tilde{\alpha} &= x_1 \in \mathbb{R} \\ (\tilde{v}, p) &= x_2 \in \mathbb{R} \\ (\tilde{v}, q) &= x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung von (25) folgt $\tilde{\alpha} = x_1/2$. Wir schreiben die zweite Gleichung von (25) nach Einsetzen von $\tilde{\alpha} = x_1/2$ dann in der Form

$$(26) \quad F'(z^*)\tilde{v} = x - \frac{x_1}{2} F''(z^*)pp - \tilde{\beta} F''(z^*)pq.$$

Es kann nur dann eine Lösung $\tilde{v}$ von (26) existieren, wenn die rechte Seite dieser Gleichung in $R(F'(z^*))$ liegt, d.h. wenn gilt

$$\langle \psi, x - \frac{x_1}{2} F''(z^*)pp - \tilde{\beta} F''(z^*)pq \rangle = 0$$

Äquivalent dazu ist

$$\langle \psi, x \rangle - \frac{x_1}{2} a_1 - \tilde{\beta} a_2 = 0.$$

Wegen $a_1 = 0$ (vgl. (22)) folgt $\tilde{\beta} = \langle \psi, x \rangle / a_2$.
Man hat nun

$$(27) \quad F'(z^*)\tilde{v} = x - \frac{x_1}{2} F''(z^*)pp - \frac{\langle \psi, x \rangle}{a_2} F''(z^*)pq \in R(F'(z^*))$$

zu lösen. Sei $\hat{v}$ irgendeine Lösung von (27). Dann ist auch

$$\hat{v} = \tilde{v} + cp + dq, \quad c, d \in \mathbb{R},$$

Lösung von (27). Zur Lösbarkeit der dritten und vierten Gleichung von (25): es muß gelten

$$\begin{aligned} c \cdot (p,p) + d \cdot (p,q) &= x_2 - (v,p) \\ c \cdot (p,q) + d \cdot (q,q) &= x_3 - (v,q). \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem für c und d ist wegen der linearen Unabhängigkeit von p und q eindeutig auflösbar für alle $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Insgesamt ist gezeigt, daß die Gleichung (25) für beliebige $x \in B_2$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ nach $\tilde{v}$, $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ auflösbar ist. Daraus folgt die Surjektivität der Fréchet - Ableitung. Für $i = 2$ benutzt man ganz ähnliche Argumente.

c) Aus Hilfssatz 1.5 (s.u.) folgt die Behauptung.

q.e.d.

Hilfssatz 1.5

Vor.: (i) B_1, B_2 reelle Banachräume,

(ii) $A: B_1 \rightarrow B_2$ stetiger linearer Operator mit $N(A) = \{0\}$ und $R(A) = B_2$.

Beh.: $A^{-1}: B_2 \rightarrow B_1$ existiert und ist stetig.

Beweis: A ist bijektiv, folglich existiert $A^{-1}: B_2 \rightarrow B_1$. A ist stetig, damit abgeschlossen, also auch A^{-1} abgeschlossen. Nach dem Satz über den abgeschlossenen Graphen (siehe KATO [1]) ist A^{-1} wegen $D(A^{-1}) = B_2$ stetig.

q.e.d.

Wir können nun folgendes Ergebnis formulieren.

Satz 1.4

Vor.: Es mögen die am Anfang von Abschnitt 1.3 gemachten Voraussetzungen gelten, insbesondere (11) und (12), ferner sei $F \in C^3(Q)$.

Beh.: Es existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i > 0$, $i=1,2$, so daß das nichtlineare Gleichungssystem (17) für $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ stetige Kurven $(v_i(\varepsilon), \alpha_i(\varepsilon), \beta_i(\varepsilon))$ von isolierten Lösungen besitzt. Dadurch sind mit

$$z_i(\varepsilon) = z^* + \varepsilon \{ \alpha_i(\varepsilon)p + \beta_i(\varepsilon)q \} + \varepsilon^2 v_i(\varepsilon), \quad i=1,2$$

zwei sich in z^* schneidende stetige Lösungszweige von $F(z) = 0$ definiert. Falls F k -mal stetig differenzierbar ist auf Q , so ist $z_i(\varepsilon)$, $i=1,2$, k -mal stetig differenzierbar nach ε .

Beweis: Die durch (17) definierte Abbildung von $V \times \mathbb{R}$ nach W ist stetig wegen $\|R(z)\|_2 = O(\|z - z^*\|_1^3)$. Wir betrachten (17) für $\varepsilon \rightarrow 0$: (18). (18) besitzt nach Hilfsatz 1.2 und 1.4 zwei verschiedene Lösungen, in denen die Fréchet - Ableitung von (17) eine stetige Inverse besitzt, d.h. regulär ist. Nach Satz 1.2 folgt die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung

- a) Satz 1.4 enthält Theorem 1 aus der Arbeit von CRANDALL & RABINOWITZ [1] als Spezialfall. Dort war vorausgesetzt, daß eine primäre glatte Lösungskurve $u: I \rightarrow B_1$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ und $z^* = u(0)$ existiert, ferner $p = \dot{u}(0) \neq 0$ und $a_2 \neq 0$. Dann ist $a_1 = 0$ und unsere Bedingung (12b) erfüllt.

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.4 gilt auch, daß die Nullstellenmenge von $F(z) = 0$ in der Nähe von z^* genau aus den beiden in Satz 1.4 konstruierten Lösungskurven besteht. Dies ist leicht einzusehen, wenn man etwa

$$u(t) = z^* + t \{ \alpha_1(t)p + \beta_1(t)q \} + t^2 v_1(t)$$

setzt. Dann ist nach (23)

$$\dot{u}(0) = \alpha_1(0)p + \beta_1(0)q = p.$$

Ferner gilt wegen (22)

$$a_2 = \langle \mathcal{F}, F''(z^*)\dot{u}(0)q \rangle \neq 0,$$

so daß Theorem 1 von CRANDALL & RABINOWITZ [1] anwendbar ist. Es liefert die oben genannte Aussage über die Nullstellenmenge von $F(z) = 0$.

- b) Auch ohne die Transformation aus Hilfssatz 1.3 erhält man natürlich unser Ergebnis, nur der Beweis wird unübersichtlicher.
- c) Unsere hier beschriebene Methode, die später für Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen konkretisiert wird, hat unter anderem den Vorteil, daß die hier angegebenen, für die Existenz eines Verzweigungspunktes hinreichenden Voraussetzungen (12), dessen konstruktive Bestimmung ermöglichen, vgl. Abschnitt 5.2 .

1.4 EIN ÜBERBLICK ÜBER NUMERISCHE VERFAHREN FÜR VERZWEIGUNGSPROBLEME GEWÖHNLICHER RANDWERTAUFGABEN

WEISS [1] hat 1976 das Iterationsverfahren von KELLER & LANGFORD [1] auf den Fall der RWA

$$(26) \quad Ly = \lambda f(y), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad B[y] = 0$$

mit $Ly = \sum_{j=0}^n a_j(t) d^j y / dt^j$, $a_n = 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$,

$\lambda \in \mathbb{R}$ und einem n lineare Randbedingungen bis zur Ordnung $n-1$ enthaltenden Randoperator B übertragen. Er hat ferner die Bifurkation der Differenzenapproximation

$$(27) \quad L_h y_h = \lambda_h f_h(y_h), \quad B_h[y_h] = 0$$

an (26) unter Verwendung der Theorie von KREISS [1] für lineare RWA'n untersucht. Man erhält - wieder bei einfachen Eigenwerten - die nichttrivialen Lösungen beider Verzweigungsprobleme (26) und (27) parametrisiert ähnlich wie in Satz 1.1 und Fehlerabschätzungen

$$\|y_h(\varepsilon) - \Delta_h y(\varepsilon)\| \leq C_1 h^p, \quad |\lambda_h(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)| \leq C_2 h^p \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

(Δ_h Diskretisierungsoperator) mit von ε und h unabhängigen Konstanten $C_1 > 0$ für stabile, konsistente Differenzenverfahren der Ordnung p . Das Ziel dieser Arbeit liegt mehr in der Gewinnung theoretischer Resultate als in der Bereitstellung direkt anwendbarer Algorithmen.

In diesem Zusammenhang - man kann RWA'n ja mit Hilfe Greenscher Funktionen in Integralgleichungen transformieren - soll auch ATKINSON [1] (1977) erwähnt werden. Er betrachtet Verzweigungsprobleme bei Integralgleichungen der Form

$$\lambda u(s) = \int_a^b K(s,t,u(t)) dt, \quad a \leq s \leq b$$

und zugehörige kollektiv kompakte Diskretisierungen. Auf ähnlichem Wege wie bei WEISS [1] ergeben sich vergleichbare

Resultate für die Konvergenz des nichttrivialen Zweiges des endlichdimensionalen Problems gegen den des kontinuierlichen.

In beiden Arbeiten wird das zum Beweis der Existenz des nichttrivialen Zweiges des endlichdimensionalen Problems benutzte Iterationsverfahren nicht bei den Beispielen praktisch verwendet. Statt dessen wird der nichttriviale Zweig in Abhängigkeit von λ nach konventionellen Methoden berechnet ($\lambda \neq \lambda_0$). Wie schon in Abschnitt 1.1 bemerkt, führt dies zu numerischen Schwierigkeiten infolge schlechter Kondition, abgesehen von der Frage der Möglichkeit der Parametrisierung durch λ . Ein weiterer Punkt, der Schwierigkeiten macht, ist das Problem der Anfangsnäherung, das in der Nähe des Verzweigungspunktes durch die Nachbarschaft der trivialen Lösung erschwert wird. Numerische Experimente des Verfassers haben gezeigt, daß man viel leichter Konvergenz gegen die triviale als gegen die nichttriviale Lösung erhält.

Andere Autoren, die in Abhängigkeit von λ Lösungen ähnlicher Probleme numerisch berechnen, sind SIMPSON [1], MEYER - SPASCHKE [1] und KALABA & SPINGARN [1]. Sie berichten ebenfalls von numerischen Schwierigkeiten.

LANGFORD [2] hat 1977 ein Verfahren angegeben, das eine Realisation des KELLER & LANGFORD'schen Iterationsverfahrens darstellt zur Berechnung von nichttrivialen Lösungen der RUA

$$y' = f(t, y, \lambda), \quad B_a y(a) + B_b y(b) = 0$$

mit $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{n, n}$, $f: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t, y, 0) = 0$ in der Nähe von Verzweigungspunkten. Der Kern des Verfahrens ist eine Shooting - Methode für nichtinvertierbare lineare RUA'n, die in jedem Iterationsschritt gelöst werden müssen. Dieses spezielle Shooting - Verfahren (LANGFORD [1]) benutzt die Moore - Penrose - Pseudoinverse von Matrizen. Im Lauf des LANGFORD'schen Verfahrens müssen etliche Skalarprodukte

von Vektorfunktionen approximativ durch Quadratur berechnet werden. Auch ist man an ein festes Gitter gebunden. Fehleraussagen fehlen. Die numerischen Resultate sind sehr überzeugend.

Im September 1977 erschien eine Dissertation von SEYDEL [1], die unseren Problemkreis mit Hilfe des Multiple - Shooting - Verfahrens auf mehr experimentellem Wege angeht.

Zum Schluß sei auf KELLER [3] und SCHEURLE [1] hingewiesen.

2 VERFAHREN ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG VON VERZWEIGUNGS- PROBLEMEN GEWÖHNLICHER RANDWERTAUFGABEN IM FALLE EINFACHER EIGENWERTE

2.1 AUFGABENSTELLUNG

Gegeben sei die nichtlineare RWA

$$(1) \quad \begin{aligned} Lu - f(\lambda, u) &= 0, \quad a \leq t \leq b, \\ B[u] &= B_a u(a) + B_b u(b) = 0 \end{aligned}$$

mit

$$(2) \quad \begin{aligned} Lu(t) &= u'(t) - A(t)u(t), \quad a \leq t \leq b, \quad u \in C_n^1[a, b], \\ A &\in C_{n \times n}[a, b], \quad B_a, B_b \in \mathbb{R}^{n, n}, \quad \text{Rang}[B_a \ B_b] = n, \\ f: \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad 0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \Omega \text{ offen}, \quad f(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ f &\text{ dreimal stetig differenzierbar auf } \mathbb{R} \times \Omega. \end{aligned}$$

Auf $C_n[a, b]$, dem Vektorraum der auf $[a, b]$ stetigen, reellwertigen Vektorfunktionen mit n Komponenten, definieren wir die Norm $\| \cdot \|$ durch

$$\|y\| = \max_{t \in [a, b]} \|y(t)\|_\infty \quad \forall y \in C_n[a, b]$$

und das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ durch

$$\langle y, z \rangle = \int_a^b y(t)^T z(t) dt \quad \forall y, z \in C_n[a, b].$$

Aus (2) folgt, daß $u \equiv 0$ Lösung von (1) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Nach Hilfssatz 1.1 ist eine notwendige Bedingung für einen Verzweigungspunkt $(\lambda_0, 0)$, daß der lineare Differentialoperator L_0 mit Differentialausdruck $L - f_u(\lambda_0, 0)$ und Definitionsbereich $D(L_0) = \{y \in C_n^1[a, b] \mid B[y] = 0\}$ singular wird. Speziell setzen wir hier voraus:

$$(3) \quad \dim N(L_0) = 1, \quad N(L_0) = \text{span}\{\varphi\}, \quad \|\varphi\| = 1.$$

Der zu L_0 adjungierte lineare Differentialoperator L_0^* ist definiert durch (REID [1])

$$(4) \quad \begin{aligned} L_0^* z(t) &= -z'(t) - A_0(t)z(t), \quad a \leq t \leq b, \\ D(L_0^*) &= \{y \in C_n^1[a,b] \mid P[y] = 0\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} A_0(t) &= A(t) + f_u(\lambda_0, 0), \quad P[y] = P_a y(a) + P_b y(b), \\ P_a, P_b &\in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \text{Rang}[P_a \ P_b] = n, \quad B_a P_a^T - B_b P_b^T = 0. \end{aligned}$$

Der Nullraum $N(L_0^*)$ von L_0^* ist wegen (2) und (3) ebenfalls eindimensional

$$(5) \quad \dim N(L_0^*) = 1, \quad N(L_0^*) = \text{span}\{\psi\}, \quad \|\psi\| = 1,$$

und es gilt die Fredholmsche Alternative

$$(6) \quad R(L_0) = N(L_0^*)^\perp,$$

wobei $S^\perp = \{y \in C_n[a,b] \mid \langle y, s \rangle = 0 \ \forall s \in S\}$. Wir setzen weiter voraus: der "Bifurkationskoeffizient" sei ungleich Null:

$$(7) \quad a_0 = \langle \psi, f_{u\lambda}(\lambda_0, 0) \rangle \neq 0.$$

Die bisher an λ_0 gemachten Voraussetzungen sind äquivalent zu:

"Null sei $f_{u\lambda}(\lambda_0, 0)$ - einfacher Eigenwert von L_0 ".

f hat die Entwicklung (zur Abkürzung setzen wir $f_u^0 := f_u(\lambda_0, 0)$ u.s.w.)

$$(8) \quad f(\lambda, u) = f_{uu}^0 u + f_{u\lambda}^0 u(\lambda - \lambda_0) + Q(u) + R(\lambda, u),$$

wobei $Q(u) = \frac{1}{2} f_{uuu}^0 u u$ und $R(\lambda, u)$ nur Terme dritter und höherer Ordnung in u und $\lambda - \lambda_0$ enthält.

2.2 TRANSFORMATION IN EINE REGULÄRE RANDWERTAUFGABE

Für die in $(\lambda_0, 0)$ abzweigende nichttriviale Lösung, deren Existenz wir hier noch zeigen müssen, machen wir den von KELLER & LANGFORD [1] begründeten Ansatz - man geht dabei ähnlich vor wie in (1.13), (1.14) -

$$(9) \quad \begin{aligned} u(\varepsilon) &= \varepsilon \varphi + \varepsilon^2 v(\varepsilon), & v(\varepsilon) &\in N(L_0)^\perp, \\ \lambda(\varepsilon) &= \lambda_0 + \varepsilon \gamma(\varepsilon). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (9) in (1), (8) ergibt sich wegen $L_0 \varphi = 0$ nach Division durch ε^2

$$(10) \quad \begin{aligned} L_0 v(\varepsilon) &= r(\varepsilon) r_{u\lambda}^0(\varphi + \varepsilon v(\varepsilon)) + Q(r + \varepsilon v(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^2} R(\lambda_0 + \varepsilon \gamma(\varepsilon), \varepsilon \varphi + \varepsilon^2 v(\varepsilon)) \\ \langle v(\varepsilon), \varphi \rangle &= 0, \quad B[v(\varepsilon)] = 0. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $v(\varepsilon)$ und $\gamma(\varepsilon)$ hat LANGFORD [2] ein Iterationsverfahren der Form

$$(11) \quad \begin{aligned} \gamma_0(\varepsilon) &= 0, \quad v_0(\varepsilon) = 0, \\ \text{für } i=0, 1, 2, \dots: \\ \gamma_{i+1}(\varepsilon) &= -r_0^{-1} \left\langle r + \gamma_i(\varepsilon) r_{u\lambda}^0 v_i(\varepsilon) + Q(r + \varepsilon v_i(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^2} R_1, \right. \\ &\quad \left. \text{bestimme } v_{i+1}(\varepsilon) \text{ aus} \right. \\ L_0 v_{i+1}(\varepsilon) &= \gamma_{i+1}(\varepsilon) r_{u\lambda}^0 \varphi + \varepsilon \gamma_i(\varepsilon) r_{u\lambda}^0 v_i(\varepsilon) + Q(r + \varepsilon v_i(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^2} R_1, \\ \langle v_{i+1}, \varphi \rangle &= 0, \quad R_i = R(\lambda_0 + \varepsilon \gamma_i(\varepsilon), \varepsilon \varphi + \varepsilon^2 v_i(\varepsilon)), \quad B[v_{i+1}(\varepsilon)] = 0 \end{aligned}$$

benutzt. Im ersten Teilschritt bestimmt man dabei $\gamma_{1,1}(\varepsilon)$ so, daß die zweite Gleichung für $v_{1+1}(\varepsilon)$ lösbar wird. Die Eindeutigkeit von $v_{i+1}(\varepsilon)$ wird durch die Orthogonalitätsbedingung gewährleistet. Zur Auflösung des nichtinvertierbaren linearen RUA im jeweils zweiten Teilschritt verweisen wir auf das in Abschnitt 1.3 gesagte und LANGFORD [1], [2].

Bemerkung

Die klassische Ljapunov - Schmidt - Methode, siehe etwa

STAKGOLD [1], besteht in unserem Fall darin, zu vorgegebenem ε und γ , ausgehend von $v_0(\varepsilon) = 0$ mit Hilfe des Iterationsverfahrens

$$v_{i+1} = L_0^+ \left\{ f_{u\lambda}^0(\gamma + \varepsilon v_i) + Q(\gamma + \varepsilon v_i) + \frac{1}{\varepsilon^2} R(\lambda_0 + \varepsilon \gamma, \varepsilon \gamma + \varepsilon^2 v_i) \right\}, \quad i=1, 2, \dots$$

eine Lösung v zu berechnen und dann unter Verwendung der "Verzweigungsgleichung"

$$\langle \gamma, \gamma f_{u\lambda}^0(\gamma + \varepsilon v) + Q(\gamma + \varepsilon v) + \frac{1}{\varepsilon^2} R(\lambda_0 + \varepsilon \gamma, \varepsilon \gamma + \varepsilon^2 v) \rangle = 0$$

$\gamma = \gamma(\varepsilon)$ iterativ so zu bestimmen, daß der Term auf der rechten Seite dieses Skalarprodukts in $R(L_0)$ liegt, d.h. (1) erfüllt ist. Hierbei bezeichnet L_0^+ eine geeignete verallgemeinerte Inverse von L_0 , vgl. REID [1]. Dieses Vorgehen erscheint jedoch wegen zweier Iterationen etwas aufwendig, siehe auch CRANDALL [1].

In dieser Arbeit soll nun ein Weg gezeigt werden, der es möglich macht, Standardverfahren der Numerik für lineare und nichtlineare RWA'n zur Lösung unseres Verzweigungsproblems nutzbar zu machen:

Dazu definieren wir folgende nichtlineare RWA der Dimension $N = n+2$

$$L_0 v(\varepsilon) - \gamma(\varepsilon) f_{u\lambda}^0(\gamma + \varepsilon v(\varepsilon)) = Q(\gamma + \varepsilon v(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^2} R(\lambda_0 + \varepsilon \gamma(\varepsilon), \varepsilon \gamma + \varepsilon^2 v(\varepsilon))$$

(12) $\gamma(\varepsilon)' = 0$

$$\mu' - \gamma^T v(\varepsilon) = 0, \quad B[v(\varepsilon)] = 0, \quad \mu(a) = \mu(b) = 0. \quad (' = \frac{d}{dt})$$

Wir haben dabei $\gamma(\varepsilon)$ zusätzlich als (konstante) Variable eingeführt und die Orthogonalitätsbedingung an $v(\varepsilon)$ als Differentialgleichung mit Randbedingungen formuliert. Es ist klar, daß die Aufgabenstellungen (10) und (12) äquivalent sind.

Um die Lösbarkeitseigenschaften von (12) zu untersuchen,

betrachten wir diese RWA für $\varepsilon \rightarrow 0$. Man erhält

$$(13) \quad \begin{aligned} L_0 v(0) - \eta(0) f_{u\lambda}^0 \psi &= Q(\psi) \\ \eta(0)' &= 0 \\ \mu' - \psi^T v(0) &= 0, \quad B[v(0)] = 0, \quad \mu(a) = \mu(b) = 0. \end{aligned}$$

Den durch die linke Seite und die Randbedingungen der linearen RWA (13) definierten linearen Differentialoperator der Dimension $N = n+2$ nennen wir $\mathcal{L}$. Für ihn gilt

Hilfssatz 2.1

Vor.: $a_0 = \langle \psi, f_{u\lambda}^0 \psi \rangle \neq 0$

Beh.: $\mathcal{L}$ ist invertierbar.

Beweis: Sei $\{v_0, \eta_0, \mu_0\}$ Lösung der homogenen RWA (13). Dann gilt $L_0 v_0 \in R(L_0) = N(L_0^*)^\perp$, folglich

$$0 = \langle \psi, L_0 v_0 \rangle = \langle \psi, \eta_0 f_{u\lambda}^0 \psi \rangle = \eta_0 a_0.$$

Aus $a_0 \neq 0$ folgt $\eta_0 \equiv 0$, also $L_0 v_0 = 0$. Wegen (3) gilt damit $v_0 = c\psi$, $c \in \mathbb{R}$. Aus der dritten Gleichung von (13) und den Randbedingungen für μ folgt $c = 0$, d.h. $v_0 \equiv 0$ und $\mu_0 \equiv 0$. Die homogene Gleichung

$$\mathcal{L}\xi = 0, \quad \xi \in D(\mathcal{L}) \subset C_N^1[a, b]$$

besitzt also keine nichttrivialen Lösungen. Nach bekannten Sätzen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (vgl. REID [1]) hat der Nullraum von $\mathcal{L}^*$ hier dieselbe Dimension wie $N(\mathcal{L})$. Es folgt

$$R(\mathcal{L}) = N(\mathcal{L}^*)^\perp = C_N[a, b],$$

$\mathcal{L}$ ist bijektiv, woraus die Behauptung folgt.

q.e.d.

Bemerkung

Man kann den Beweis von Hilfssatz 2.1 auch mit Hilfe der

"Bordering" - Methode für lineare Differentialoperatoren von REID [2] führen, die eine Verallgemeinerung der bekannten Bordering (Ränderungs) - Methode für Matrizen darstellt, aber anscheinend wenig bekannt ist.

Hilfssatz 2.1 gibt uns nun die Möglichkeit, Aussagen über das Lösungsverhalten der RWA (12) zu machen, die für numerische Zwecke sehr von Nutzen sind.

Satz 2.1

Vor.: Alle Voraussetzungen aus Abschnitt 2.1 mögen gelten, insbesondere sei $a_0 \neq 0$, ferner f k - mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \times \Omega$, $k \geq 3$.

Beh.: (i) Es gibt eine reelle Zahl $\varepsilon_0 > 0$, so daß genau eine auf $(-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ definierte stetige Kurve von Lösungen $(v(\varepsilon), \eta(\varepsilon), \mu(\varepsilon))$ der RWA (12) existiert.
 (ii) Die genannten Lösungen sind isoliert und k - mal stetig differenzierbar nach ε .
 (iii) Mit Hilfe von (9) ist damit ein Zweig von nicht-trivialen Lösungen von (1) definiert.

Beweis: Wir schreiben (12) als Operatorgleichung in der Form

$$G(\varepsilon; \xi(\varepsilon)) = 0, \quad \xi(\varepsilon) = (v(\varepsilon), \eta(\varepsilon), \mu(\varepsilon)).$$

Es gilt $G(0; \xi) = \mathcal{L}\xi - g$ mit geeignetem $g \in C_N[a, b]$, also $G_\xi(0; \xi) = \mathcal{L}$. Wir betrachten G als Abbildung von $\mathbb{R} \times D(\mathcal{L})$ nach $C_N[a, b]$. Auf $D(\mathcal{L})$ verwenden wir die Graphennorm

$$\|u\|_G := \|u\| + \|\mathcal{L}u\| \quad \forall u \in D(\mathcal{L}).$$

Dann ist klar, daß G und $\mathcal{L}$ stetig sind. Hat man $\mathcal{L}u = f$, so gilt

$$\|u\| \leq K \|f\|$$

mit geeignetem $K > 0$ nach Hilfssatz 2.1. Invertierbare Differentialoperatoren sind ja stets stetig invertierbar bezüglich der Maximumnorm.

Aus

$$\|\mathcal{L}^{-1}f\|_G = \|u\|_G = \|u\| + \|\mathcal{L}u\| \leq (K+1) \|f\|$$

folgt die stetige Invertierbarkeit von $\mathcal{L}$ als Operator von $D(\mathcal{L})$ nach $C_N[a,b]$. Mit Hilfe des Theorems über implizit definierte Funktionen (Satz 1.2) folgt die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung

Sind $A(t)$ und $f(\lambda, u)$ k -mal stetig differenzierbar, so ist $u(\varepsilon)$ $k+1$ -mal stetig differenzierbar als Funktion von t .

Mit Hilfe des Ansatzes (9) und von (12) haben wir die triviale Lösung $u \equiv 0$ von (1) quasi "ausgeblendet" und befinden uns nun noch auf dem allein interessierenden nicht-trivialen Zweig. Das Theorem über implizite Funktionen sichert die Regularität der RWA (12) in der Nähe von $\varepsilon = 0$, d.h. die Lösungen sind isoliert, was für die Anwendung numerischer Verfahren wichtig ist.

Bevor wir uns mit der Anwendung von Diskretisierungs-
methoden auf (12) befassen, wollen wir kurz die Eigenschaften
wichtiger Verfahren, Differenzen- und Shooting-Verfahren,
beleuchten.

2.3 DISKRETISIERUNGSVERFAHREN FÜR RANDWERTAUFGABEN

2.3.1 DIFFERENZENVERFAHREN

Wir betrachten nichtlineare RWA'n der Form

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{N}y &= y' - f(t, y) = 0, \quad a \leq t \leq b, \\ g(y(a), y(b)) &= 0 \end{aligned}$$

mit $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; f, g hinreichend glatt. Wir beschäftigen uns nur mit isolierten Lösungen von (14), d.h. mit Lösungen $\bar{y}$, für die das in $\bar{y}$ linearisierte Problem

$$(15) \quad \begin{aligned} L\{\bar{y}\}z &= 0, \quad a \leq t \leq b, \\ B\{\bar{y}\}[z] &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $z \equiv 0$ hat; dabei sind

$$\begin{aligned} L\{\bar{y}\}z(t) &= z'(t) - A(t)z(t) \\ B\{\bar{y}\}[z] &= B_a\{\bar{y}\}z(a) + B_b\{\bar{y}\}z(b) \end{aligned}$$

mit

$$(16) \quad A(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y}(t)), \quad B_x\{\bar{y}\} = \frac{\partial g(\bar{y}(a), \bar{y}(b))}{\partial \bar{y}(x)}, \quad x=a, b$$

Zur Konstruktion von Differenzenverfahren betrachten wir eine Familie von Gittern $\{t_j\}_{j=1}^J$ der Form

$$(17a) \quad t_0 = a, \quad t_j = t_{j-1} + h_j, \quad 1 \leq j \leq J, \quad t_J = b,$$

die der Bedingung

$$(17b) \quad h = \max_j h_j \leq r \min_j h_j$$

mit festem $r > 0$ genügen sollen. Bezeichnet $u_h = (u_0^T, \dots, u_J^T)^T$ eine Approximation für $(y(t_0)^T, \dots, y(t_J)^T)^T$, so hat ein allgemeines Differenzenschema die Form

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_h u_j &= G_j(u_h) = 0, \quad 1 \leq j \leq J, \\ g(u_0, u_j) &= 0. \end{aligned}$$

Der lokale Diskretisierungsfehler von (18), angewandt auf (14), ist

$$\tau_0(\bar{y}) = g(\bar{y}(a), \bar{y}(b)), \quad \tau_j(\bar{y}) = \mathcal{A}_h \bar{y}(t_j), \quad 1 \leq j \leq J,$$

wobei $\bar{y}$ Lösung von (14) ist. (18) heißt konsistent von der Ordnung p für die Lösung $\bar{y}$, falls Konstanten $K_0 > 0$ und $h_0 > 0$ existieren mit

$$\|\tau_j(\bar{y})\| \leq K_0 h^p, \quad 0 \leq j \leq J$$

für alle Gitter (17) mit $h \leq h_0$. (18) heißt stabil für y_h , falls es positive Konstanten K_ζ , ζ und h_0 gibt, so daß für alle Gitterfunktionen $v_h, w_h \in S_\zeta(y_h) = \{u_h \mid \|y_j - u_j\| \leq \zeta, 0 \leq j \leq J\}$ und alle Gitter (17) mit $h \leq h_0$ gilt

$$\|v_j - w_j\| \leq K_\zeta \max \left\{ \|\mathcal{A}_h v_k - \mathcal{A}_h w_k\|, 1 \leq k \leq J; \|g(v_0, v_J) - g(w_0, w_J)\| \right\},$$

$$0 \leq j \leq J.$$

Satz 2.2

Vor.: $\bar{y}$ sei Lösung von (14); für alle Gitter (17) mit $h \leq h_0$ sei u_h Lösung von (18) mit $u_h \in S_\zeta(\bar{y}_h)$, wobei $\bar{y}_j = \bar{y}(t_j)$, $0 \leq j \leq J$. (18) sei konsistent von der Ordnung p und stabil für $\bar{y}_h$.

Beh.: Für alle Gitter (17) mit $h \leq h_0$ gilt

$$\|\bar{y}(t_j) - u_j\| \leq K_0 K_\zeta h^p, \quad 0 \leq j \leq J.$$

Beweis: KELLER & WHITE [1].

2.3.2 DIE TRAPEZREGEL

In dieser Arbeit verwenden wir häufig die Trapezregel, ein in Theorie und Praxis recht attraktives Differenzenverfahren, das zudem eine sehr einfache Gestalt hat:

$$(19) \quad \mathcal{A}_h^* u_j = \frac{1}{h_j} (u_j - u_{j-1}) - \frac{1}{2} [f(t_j, u_j) + f(t_{j-1}, u_{j-1})] = 0, \quad 1 \leq j \leq J,$$

$$g(u_0, u_J) = 0.$$

Es gilt

Satz 2.3

Vor.: Die RWA (14) besitze eine isolierte Lösung $\bar{y} \in C_n^4[a, b]$; sei $f(t, y) \in C_n^3\{[a, b] \times S[\bar{y}(t)]\}$, wobei $S_\varphi[\bar{y}(t)] = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - \bar{y}(t)\| \leq \varphi\} \subset \mathbb{R}^n$; sei $g(v, w) \in C_n^2\{S_\varphi[\bar{y}(a)] \times S_\varphi[\bar{y}(b)]\}$.

Beh.: Es gibt positive Konstanten φ und h_0 , so daß für alle Gitter (17) mit $h \leq h_0$ gilt:

- (i) Die Differenzengleichungen (19) haben eine eindeutig bestimmte Lösung $u_h = (u_0^T, \dots, u_J^T)^T$, $u_h \in S_\varphi(\bar{y}_h)$, $\bar{y}_j = \bar{y}(t_j)$, $0 \leq j \leq J$.
- (ii) u_h kann mit dem Newton - Verfahren berechnet werden, das für alle Startwerte $u_h^0 \in S_{\varphi_0}(\bar{y}_h)$, φ_0 hinreichend klein, quadratisch konvergiert.

$$(20) \quad (iii) \quad \|u_j - \bar{y}(t_j)\| = O(h^2), \quad 0 \leq j \leq J.$$

- (iv) Falls f hinreichend glatt ist, ferner die Stützstellen äquidistant, so existieren $e_v \in C_n^1[a, b]$ mit

$$(21) \quad u_j - \bar{y}(t_j) = \sum_{v=1}^m h^{2v} e_v(t_j) + O(h^{2m+2}), \quad 0 \leq j \leq J.$$

Beweis: KELLER [2], LENTINI & PEREYRA [1].

(21) gilt auch für nicht äquidistante Stützstellenverteilungen, jedoch müssen strengere Voraussetzungen als (17) gemacht werden. Der Einfachheit halber verzichten wir darauf.

Die asymptotische Entwicklung (21) kann zur Rechtfertigung der Extrapolation auf die Schrittweite $h = 0$ dienen. Man erzielt so Verfahren beliebig hoher Ordnung. Praktisch benutzt man zur Extrapolation etwa den Neville - Algorithmus.

Alle hier gemachten Aussagen gelten entsprechend auch für die implizite Euler - Regel.

2.3.3 SHOOTING - VERFAHREN

Beim häufig verwandten Shooting - Verfahren formuliert man zur Lösung der RWA (14) folgende Aufgabenstellung:

Bestimme $s \in \mathbb{R}^n$ so, daß die Lösung $u(t;s)$ der Anfangswertaufgabe (AWA)

$$(22) \quad \begin{aligned} u'(t;s) &= f(t, u(t;s)), \quad a \leq t \leq b, \\ u(a;s) &= s \end{aligned}$$

die Gleichung

$$(23) \quad F(s) = g(s, u(b;s)) = 0$$

erfüllt. Die Lösung von (14) ist damit auf die Lösung von AWA'n (22) und des nichtlinearen Gleichungssystems $F(s) = 0$ zurückgeführt.

Numerische Schwierigkeiten bei der praktischen Durchführung des Shooting - Verfahrens führten zur Entwicklung des Multiple - Shooting - Verfahrens:

Das Intervall $[a, b]$ wird durch

$$G = \{a=t_0 < t_1 < \dots < t_J=b\}$$

unterteilt, und man betrachtet das Problem:

Bestimme $\bar{s} = (s_0^T, \dots, s_{J-1}^T)^T \in \mathbb{R}^{mJ}$ so, daß die Lösungen der AWA'n

$$(24) \quad \left. \begin{aligned} u_j'(t; s_j) &= f(t, u_j(t; s_j)), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ u_j(t_j; s_j) &= s_j \end{aligned} \right\} 0 \leq j \leq J-1$$

die Gleichungen

$$(25) \quad \begin{aligned} \bar{F}_j(\bar{s}) &= u_j(t_{j+1}; s_j) - s_{j+1} = 0, \quad 0 \leq j \leq J-2, \\ \bar{F}_{J-1}(\bar{s}) &= g(s_0, u_{J-1}(b; s_{J-1})) = 0, \end{aligned}$$

kurz $\bar{F}(\bar{s}) = 0$, erfüllen.

Für Shooting und Multiple - Shooting - Verfahren gilt

Satz 2.4

- Vor.:
- (i) $\bar{y} \in C_n^1[a, b]$ isolierte Lösung von (14),
 - (ii) $f \in C_n^2([a, b] \times S_\delta[\bar{y}(t)])$, $\delta > 0$,
 - (iii) $g \in C_n^2[Q_\delta]$, $Q_\delta = \{(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|y - \bar{y}(a)\| \leq \delta, \|z - \bar{y}(b)\| \leq \delta\}$,
 - (iv) $K := \{s \mid \|\bar{y}(a) - s\| \leq \delta\}$,
 $\bar{K} := \{\bar{s} \mid \|\bar{y}(t_j) - s_j\| \leq \delta, 0 \leq j \leq J-1\}$,
wobei L die Lipschitzkonstante von f bezüglich y auf $S_\delta[\bar{y}(t)]$, $\delta = \delta \exp(-L(b-a))$,
 $\delta = \delta \exp(-L \max_j \{t_{j+1} - t_j\})$.

- Beh.:
- (i) $F \in C^2(K)$,
 $F(s^*) = 0$ für $s^* = y(a)$,
 $F'(s^*)$ regulär.
 - (ii) $\bar{F} \in C^2(\bar{K})$,
 $\bar{F}(\bar{s}^*) = 0$ für $\bar{s}^* = (\bar{y}(t_0)^T, \dots, \bar{y}(t_{J-1})^T)^T$,
 $\bar{F}'(\bar{s}^*)$ regulär.

Beweis: Weiss [2].

Aus Satz 2.4 folgt, daß ein Verfahren vom Newtonschen Typ erfolgreich auf (23) bzw. (25) angewandt werden kann, wenn die Startwerte genau genug sind und alle Berechnungen hinreichend genau durchgeführt werden.

2.4 ANWENDUNG DER DISKRETISIERUNGSVERFAHREN UND FRAGEN DER ANFANGSNÄHERUNGEN

Wir schreiben unsere in Abschnitt 2.2 hergeleitete nicht-lineare RWA in der Form

$$(26) \quad \begin{aligned} \xi' &= g(t, \xi; \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \\ g(\xi(a), \xi(b)) &= \bar{\theta}_a \xi(a) + \bar{\theta}_b \xi(b) = 0 \end{aligned}$$

mit

$$\bar{\theta}_a = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & \theta_a & & \\ & & \theta & \theta \\ \hline \theta & & 0 & 1 \\ \theta & & 0 & 0 \end{array} \right) \Bigg\}^n, \quad \bar{\theta}_b = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & \theta_b & & \\ & & \theta & \theta \\ \hline \theta & & 0 & 0 \\ \theta & & 0 & 1 \end{array} \right)$$

und können nun Standardverfahren - wir beschreiben hier nur den Fall der Differenzenverfahren - zur numerischen Lösung heranziehen. Hat unser Differenzenverfahren die Ordnung p , so erhält man für $|t| \leq \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, die Fehlerabschätzung

$$(27) \quad \begin{aligned} \|u_j(\varepsilon) - u(t_j; \varepsilon)\| &\leq kh^p \varepsilon^2, \quad t_j \in G_h, \\ |\lambda^h(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)| &\leq kh^p \varepsilon, \quad K \text{ unabhängig von } h \text{ und } \varepsilon. \end{aligned}$$

Dabei ist h die Schrittweite, $u_j(\varepsilon) = \varepsilon^q(t_j) + \varepsilon^2 v_j(\varepsilon)$,
 $\lambda^h(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \gamma_0(\varepsilon)$ mit $v_h(\varepsilon) = (v_0(\varepsilon)^T, \dots, v_J(\varepsilon)^T)^T$,
 $\gamma_h(\varepsilon) = (\gamma_0(\varepsilon), \dots, \gamma_J(\varepsilon))^T$, $\xi_h(\varepsilon) = (v_h(\varepsilon), \gamma_h(\varepsilon), \mu_h(\varepsilon))$.

Im Fall $\varepsilon = 0$ hat man es bei (26) mit einer linearen RWA zu tun, so daß hier keine Schwierigkeiten mit Startnäherungen anfallen. Man kann nun so vorgehen, daß man, ausgehend von $\xi^{(0)} = 0$, $\xi_h(0)$, die Lösungen der diskretisierten Gleichung (26), schreiben wir sie in der Form

$$(28) \quad \phi_h(\xi_h; \varepsilon) = 0$$

mit $\phi_h: \mathbb{R}^{N(J+1)} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N(J+1)}$,

für $\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)} + \Delta \varepsilon^{(i)}$ berechnet und als Anfangsnäherung jeweils $\xi_h^0(\varepsilon^{(i)}) = \xi_h(\varepsilon^{(i-1)})$ verwendet. Für hinreichend kleine Schrittweiten $\Delta \varepsilon^{(i)}$ hat man in der Praxis mit diesem Homotopie - Verfahren Erfolg. Wir wollen diese Vorgehensweise noch etwas näher quantifizieren. Dabei verwenden wir den Satz von Kantorowitsch in folgender Fassung:

Hilfssatz 2.2

- Vor.:
- (i) E_1, E_2 Banachräume, $F: E_1 \rightarrow E_2$ Fréchet - differenzierbar in $S(x^0, R) = \{x \in E_1 \mid \|x - x^0\| < R\}$,
 - (ii) $\|F'(x) - F'(y)\| \leq K \|x - y\|$ auf $S(x^0, R)$,
 - (iii) $F'(x^0)^{-1}$ existiere mit $\|F'(x^0)^{-1}\| \leq b_0$,
 - (iv) $\|F'(x^0)^{-1} F x^0\| \leq \gamma_0$, $p_0 := b_0 K \gamma_0 \leq 1/2$,
 $r_0 := (1 - \sqrt{1 - 2p_0})/b_0 K \leq R$

Beh.: Das Newton - Verfahren

$$x^{n+1} = x^n - F'(x^n)^{-1} F x^n$$

konvergiert gegen eine Lösung $x^* \in S(x^0, r_0)$ von $Fx = 0$.

Beweis: siehe 11.3 in KRASNOSEL'SKII [1].

Satz 2.5

- Vor.:
- (i) $\xi_h(0)$ isolierte Lösung von $\phi_h(z_h; 0) = 0$,
 - (ii) $\phi_h \in C^2(\bar{F})$, $F = S_R(\xi_h(0), R) \times [0, \varepsilon_0)$,
 $S_R(\xi_h(0), R) = \{z_h \in \mathbb{R}^{N(J+1)} \mid \|z_h - \xi_h(0)\| < R\}$,
 $\|z_h\| = \max_i \|z_i\|_\infty$,
 - (iii) für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ sei $\phi_h'(\xi_h(0); \varepsilon)$ regulär
 $(\cdot)' = d/d\xi_h$,
 - (iv) $h \leq h_0$, h_0 hinreichend klein.

Beh.: Es existiert ein $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$, so daß das Newton -

Verfahren mit Startwert $\xi_h^0(\varepsilon) = \xi_h(0)$ gegen die isolierte Lösung $\xi_h(\varepsilon)$ von $\phi_h(z_h; \varepsilon) = 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, konvergiert.

Zur Bestimmung von ε_1 :

Es gelte

$$(29) \quad \sup_{(z_h, \varepsilon) \in F} \|\phi_h(z_h; \varepsilon) - \phi_h(z_h; 0)\| \leq G_1 |\varepsilon|,$$

$$(30) \quad \|\phi_h'(z_h; \varepsilon) - \phi_h'(y_h; \varepsilon)\| \leq G_2 \|z_h - y_h\| \quad \forall (y_h, \varepsilon), (z_h, \varepsilon) \in F,$$

$$(31) \quad G_3 := \sup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)} \|\phi_h'(\xi_h(0); \varepsilon)^{-1}\|.$$

ε_1 ist nun so zu wählen, daß

$$(32) \quad \rho_0 := G_3^2 G_2 G_1 \varepsilon_1 \leq 1/2$$

und

$$(33) \quad r_0 := (1 - \sqrt{1 - 2\rho_0}) / G_3 G_2 \leq R$$

ausfallen. Dann gilt

$$(34) \quad \|\xi_h(0) - \xi_h(\varepsilon)\| \leq r_0.$$

Beweis: Wir wollen zeigen, daß Hilfssatz 2.2 anwendbar ist und die Abschätzungen (32) - (34) liefert. Dazu sei $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^{N(J+1)}$. $\phi_h'(\xi_h(0); \varepsilon)^{-1}$ existiert für $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ nach Voraussetzung. Die Lipschitzstetigkeit von $\phi_h'(\cdot, \varepsilon)$ auf $S(\xi_h(0); R)$ haben wir laut (30). Zur Abschätzung von

$$\|\phi_h'(\xi_h(0); \varepsilon)^{-1} \phi_h(\xi_h(0); \varepsilon)\| :$$

Wegen (29) und (31) folgt leicht

$$\|\phi_h'(\xi_h(0); \varepsilon)^{-1} \phi_h(\xi_h(0); \varepsilon)\| \leq G_3 G_1 |\varepsilon|.$$

$b_0 := G_3$, $K := G_2$ und $\gamma_0 := G_3 G_1 |\varepsilon|$ hat man

$$\rho_0 := G_3^2 G_2 G_1 \hat{\varepsilon}_1 \leq 1/2$$

mit geeignetem $\hat{\varepsilon}_1$. Durch eventuelles weiters Verkleinern von $\hat{\varepsilon}_1$ zu ε_1 erreicht man $r_0 \leq R$. Mit Hilfssatz 2.2 folgt die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkungen

- 1) Zur Voraussetzung " $\phi'_h(\xi_h(0); \varepsilon)$ regulär":
 $\phi_h(\xi_h(0); 0)$ und $\phi_h(\xi_h(\varepsilon); \varepsilon)$ sind regulär für $h \in h_0$, h_0 hinreichend klein (vgl. KELLER [2]). Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch $\phi'_h(\xi_h(0); \varepsilon)$ für $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ regulär; eventuell muß man ε_0 verkleinern.
- 2) Als G_2 kann man das Maximum von $\|\bar{B}_a\|$, $\|\bar{B}_b\|$ und der Lipschitzkonstanten von $g_\xi(t, \xi; \varepsilon)$ bezüglich ξ nehmen (vgl. KELLER [1]).
- 3) Wir haben hier nur den ersten Homotopie - Schritt $\varepsilon^{(0)} \rightarrow \varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(0)} + \Delta \varepsilon^{(1)}$ betrachtet. Jedoch ist klar, daß man das Ergebnis von Satz 2.5 auch auf die späteren Schritte $\varepsilon^{(i)} \rightarrow \varepsilon^{(i+1)}$ übertragen kann.
- 4) Statt des quadratisch konvergenten Newton - Verfahrens kann man auch ein von WERNER [1] entwickeltes Verfahren der Ordnung $1 + \sqrt{2}$ benutzen, das nur wenig mehr Rechenaufwand als das Newton - Verfahren benötigt. Wenn $F(x) = 0$ zu lösen ist, lautet es:

$$\left. \begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - F'((x^n + y^n)/2)^{-1} F(x^n) \\ y^{n+1} &= x^{n+1} - F'((x^n + y^n)/2)^{-1} F(x^{n+1}) \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots$$

Startwerte sind x^0 und y^0 . Unter entsprechenden Voraussetzungen konvergieren beide Folgen (x^n) , (y^n) von der Ordnung $1 + \sqrt{2}$ gegen die Lösung $\bar{x}$ von $F(x) = 0$.

- 5) Fehlerabschätzungen: Statt der Ordnungsaussagen in (27)

lassen sich für die Trapez - und die implizite Euler - Regel auch exakte a posteriori - Fehlerabschätzungen der richtigen Ordnung mit Hilfe des Defektes angeben, vgl. WEBER [1].

- 6) Ein ähnliches Vorgehen wie in Satz 2.5 findet man im kontinuierlichen Fall bei MEYER - SPASCHE [1].

2.5 EIN ITERATIONSVERFAHREN

Zur Bestimmung der Lösungen von (12) kann man natürlich auch anders vorgehen als bisher gezeigt. Speziell bietet sich folgende Realisierung des Iterationsverfahrens (11) (11) von LANGFORD [2] an:

$$\gamma_0(\varepsilon) \equiv 0, \quad v_0(\varepsilon) \equiv 0,$$

für $i=0,1,2,\dots$ löse die lineare RWA

$$(35) \quad L_0 v_{i+1}(\varepsilon) - \gamma_{i+1}(\varepsilon) f_{u\lambda}^0 \varphi = \varepsilon \gamma_i f_{u\lambda}^0 v_i(\varepsilon) + Q(\varphi + \varepsilon v_i(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^2} R_i$$

$$\gamma_{i+1}(\varepsilon)' = 0$$

$$\mu' + \varphi^T v_{i+1}(\varepsilon) = 0, \quad \hat{B}[v_{i+1}(\varepsilon)] = 0, \quad \mu(a) = \mu(b) = 0$$

Es gilt

Hilfssatz 2.3

Vor.: Es mögen die in Abschnitt 2.1 gemachten Voraussetzungen gelten, insbesondere (7).

Beh.: Ausgehend von $v_i(\varepsilon)$, $\gamma_i(\varepsilon)$ liefert ein Schritt des Iterationsverfahrens (35) dasselbe Ergebnis wie ein Schritt von (11).

Beweis: Das Ergebnis von (35) werde mit $\tilde{v}_{i+1}(\varepsilon)$, $\tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon)$ bezeichnet, das von (11) wie bisher ohne Schlange ~.

Der lineare Differentialoperator $\mathcal{L}$ der Dimension $N = n+2$, der auch in (35) auftritt, ist nach Hilfssatz 2.1 invertierbar, also sind $\tilde{v}_{i+1}(\varepsilon)$ und $\tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon)$ wohldefiniert.

Bezeichnen wir $\varepsilon \gamma_i(\varepsilon) f_{u\lambda}^0 v_i(\varepsilon) + \dots + R_i/\varepsilon^2$ mit q_i , so gilt

$$\langle \varphi, q_i \rangle = \langle \varphi, L_0 \tilde{v}_{i+1}(\varepsilon) \rangle - \langle \varphi, f_{u\lambda}^0 \varphi \rangle \tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon; a).$$

Wegen $L_0 \tilde{v}_{i+1}(\varepsilon) \in R(L_0) = N(L_0^\perp)^\perp = \text{span}\{\varphi\}^\perp$ ist

$$\langle \varphi, q_i \rangle = - \langle \varphi, f_{u\lambda}^0 \varphi \rangle \tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon; a) = -a_0 \tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon; a),$$

folglich $\tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon; a) = -a_0^{-1} \langle \psi, q_i \rangle$ und $\tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon) \equiv \tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon; a)$.
Ein Vergleich mit (11) zeigt, daß

$$\tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon) = \gamma_{i+1}(\varepsilon)$$

gilt. Damit ist

$$\tilde{\gamma}_{i+1}(\varepsilon) f_{u\lambda}^0 \varphi + \varepsilon \tilde{\gamma}_i(\varepsilon) f_{u\lambda}^0 v_i(\varepsilon) + \dots + \frac{1}{\varepsilon^2} R_i \in R(L_0)$$

und wegen $\tilde{v}_{i+1}(\varepsilon) \in N(L_0)^\perp$ folgt $\tilde{v}_{i+1}(\varepsilon) \equiv v_{i+1}(\varepsilon)$.

q.e.d.

Satz 2.6

Vor.: Alle Voraussetzungen aus Abschnitt 2.1 mögen gelten, insbesondere sei $a_0 \neq 0$.

Beh.: (1) besitzt einen stetigen Zweig von nichttrivialen Lösungen der Form (9) in der Nähe von $(\lambda_0, 0)$. Für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, ε_1 hinreichend klein, ergeben sich $v(\varepsilon)$ und $\gamma(\varepsilon)$ als Grenzwert der Iteration (35). Für $u_i(\varepsilon) = \varepsilon \varphi + \varepsilon^2 v_i(\varepsilon)$ und $\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \gamma_i(\varepsilon)$ gelten die Abschätzungen

$$(36) \quad \begin{aligned} \|u_i(\varepsilon) - u(\varepsilon)\| &\leq |\varepsilon|^2 (|\varepsilon|C)^i C_1, \\ |\lambda_i(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)| &\leq |\varepsilon| (|\varepsilon|C)^i C_2, \quad i=1, 2, \dots \end{aligned}$$

mit von ε unabhängigen Konstanten $C, C_1, C_2 > 0$.

Beweis: LANGFORD [2] hat für (11) die Konvergenz mit Hilfe des Kontraktionssatzes gezeigt. Aus Hilfssatz 2.3 folgt die Behauptung.

q.e.d.

Zur numerischen Rechnung muß das Iterationsverfahren (35) diskretisiert werden, wobei sich die Verfahren aus Abschnitt 2.3 anbieten. Man muß dabei allerdings etwas Vorsicht walten lassen, um bei der Berechnung der neuen Näherung nur auf die alte Näherung zurückzugreifen und nicht etwa Werte des dis-

kreten $v_i(\varepsilon)$ außerhalb des benutzten Gitters zu verwenden. Die Anwendung der Trapezregel macht in diesem Zusammenhang keine Schwierigkeiten. Man kann zeigen, daß das durch die Trapezregel diskretisierte Iterationsverfahren (35) für $|\varepsilon| \leq \tilde{\varepsilon}_1$, $\tilde{\varepsilon}_1 > 0$ unabhängig von h , und für $h \leq h_0$ konvergiert. Fehleraussagen liefert auch hierfür Abschnitt 2.4, da es sich hierbei nur um eine andere Lösungsmöglichkeit für das durch Diskretisierung von (12) mit Hilfe der Trapezregel entstandene nichtlineare Gleichungssystem handelt. Gegenüber der Auflösung von (28) mit dem Newton - Verfahren bzw. dem Newton - Verfahren mit konstanter Funktionalmatrix ergibt sich bei dem diskretisierten Iterationsverfahren ein geringerer Aufwand pro Iterationsschritt, da man für alle verwendeten ε nur eine Dreieckszerlegung durchführen muß. Andererseits wird hier die Konvergenz für wachsendes $|\varepsilon|$ schlechter, um schließlich ganz auszubleiben, was bei der anderen Vorgehensweise nicht in dem Maße eintritt, wie die Praxis zeigt.

Wir wollen nun noch kurz die Verfahren aus Abschnitt 2.5 und 2.4 mit der Methode von LANGFORD [2] vergleichen.

Als Vorteile unserer Verfahren muß man nennen:

1. Man kann Standardverfahren der Numerik verwenden.
2. Der Programmieraufwand ist geringer; unter anderem, weil keine verallgemeinerte Inverse benötigt wird.
3. Es steht eine vollständige Konvergenztheorie zur Verfügung.
4. Man ist nicht an bestimmte Gitter gebunden.
5. Man braucht keine Quadraturen.

Nachteile unserer Verfahren gegenüber LANGFORD [2]:

1. Es müssen Differentialgleichungssysteme der Dimension $n+2$ statt n behandelt werden. Man kann jedoch

durch Anwendung der von KELLER [1], S. 25 ff beschriebenen Methode zur Approximation von Integralrandbedingungen durch die Trapezregel die Dimension auf $n+1$ reduzieren.

2.6 NUMERISCHE BERECHNUNG VON EIGENWERTEN UND EIGENFUNKTIONEN

Wir haben bisher immer λ_0 und φ als gegeben angesehen. Bei vielen Problemen können diese Größen auch analytisch bestimmt werden. Dies braucht jedoch nicht immer der Fall zu sein. Dann ist man auch hierbei auf Näherungsmethoden angewiesen.

Die Bestimmung von λ_0 und φ so, daß

$$(37) \quad [L - f_U(\lambda_0, 0)]\varphi = 0, \quad B[\varphi] = 0, \quad \|\varphi\| = 1$$

gilt, stellt - außer im Fall $f(\lambda, u) = \lambda f(u)$ - eine nichtlineare Eigenwertaufgabe dar. Ein Weg zur numerischen Behandlung, bei dem man die gleichen Verfahren wie zur Berechnung des nichttrivialen Lösungszweiges von (1) benutzen kann, ist folgender. Wir betrachten die nichtlineare RWA der Dimension $N = n+2$

$$(38) \quad \begin{aligned} [L - f_U(\lambda, 0)]\varphi &= 0, & B[\varphi] &= 0 \\ \lambda' &= 0 \\ \delta' - \varphi^T \varphi &= 0, & \varphi(a) &= 0, \quad \varphi(b) = 1. \end{aligned}$$

Ist $(\varphi_0, \lambda_0, \delta_0)$ Lösung von (38), so ist klar, daß λ_0 und φ_0 die gewünschten Eigenschaften aus (37) besitzen, außer der Normierung, die hier $\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 1$ lautet, was ja unwesentlich ist.

Satz 2.7

Vor.: Die Voraussetzungen aus Abschnitt 2.1 mögen gelten, insbesondere (7).

Beh.: Die Lösung $(\varphi_0, \lambda_0, \delta_0)$ von (38) ist isoliert;

hierbei ist

$$\varphi_0(t) = \langle \varphi, \varphi \rangle^{-1} \varphi \quad \text{und} \quad \xi_0(t) = \int_a^b \varphi_0(s)^\top \varphi_0(s) ds.$$

Beweis: Wir bilden die Linearisierung von (38) in dieser Lösung:

$$\begin{aligned} (39) \quad & [L - f_u(\lambda_0, 0)]u - f_{u\lambda}(\lambda_0, 0)\varphi_0\mu = 0, \quad \theta[u] = 0 \\ & \mu' = 0 \\ & \vartheta' - 2\varphi_0^\top u = 0, \quad \vartheta(a) = \vartheta(b) = 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile von (39) folgt wegen (7) $\mu \equiv 0$, damit $u = c\varphi_0$, $c \in \mathbb{R}$. Die dritte Zeile ist äquivalent $\langle \varphi_0, u \rangle = 0$, woraus $c = 0$, $u \equiv 0$ und $\vartheta \equiv 0$ folgt. Also ist unsere Lösung isoliert.

q.e.d.

Zur numerischen Lösung von (38) können die Standardverfahren aus Abschnitt 2.3 benutzt werden.

Ähnliche Ansätze wie (38) wurden schon von SEYDEL [1] verwendet, jedoch wurde dort nicht die Isoliertheit der Lösung gezeigt. Die Einführung des Eigenwertparameters λ als zusätzliche konstante Variable findet man schon bei STOER & BULIRSCH [1].

2.7 AUSWIRKUNGEN VON STÖRUNGEN IN λ_0 UND φ

Berechnet man λ_0 und φ numerisch, etwa wie in Abschnitt 2.6 vorgeschlagen, so erhält man nur Approximationen λ_0^* und φ^* für die gesuchten Größen. Wir setzen voraus, daß Abschätzungen der Form

$$(40) \quad |\lambda_0 - \lambda_0^*| \leq \delta_1, \quad \|\varphi - \varphi^*\| \leq \delta_2 < 1, \quad \max\{\delta_1, \delta_2\} \leq \delta$$

bestehen. Löst man nun die RWA (12) mit den gestörten Daten λ_0^* , φ^* oder führt man das Iterationsverfahren (35) mit diesen gestörten Daten durch, so erhält man ein gestörtes Ergebnis $v^*(\epsilon)$, $\eta^*(\epsilon)$. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie sich Datenfehler (40) auf v und η fortpflanzen. Dabei stützen wir uns hier auf das Iterationsverfahren (35).

(35) ist durch eine beschränkte nichtlineare Abbildung

$$(41) \quad T_\epsilon(\xi) = \mathcal{L}^{-1} h_\epsilon(\xi)$$

definiert: $\xi_{i+1} = T_\epsilon(\xi_i)$, $i \geq 0$, mit $\xi = (v, \gamma, \mu)$; h_ϵ ist durch die rechte Seite von (35) gegeben.

Der Banachraum E sei definiert durch

$$\begin{aligned} E := \{ & y \in C_N[a, b] \mid y = (v, \gamma, \mu), v \in C_n[a, b], \\ & \gamma, \mu \in C[a, b], \theta[v] = 0, \mu(a) = \mu(b) = 0 \}, \\ \|y\|_E := & \max_{t \in [a, b]} \|y(t)\|_\infty. \end{aligned}$$

Alternativ zu den Überlegungen in Abschnitt 2.5 kann man leicht zeigen, daß T_ϵ die Kugel $K_\delta = \{y \in E \mid \|y - \xi^0\|_E \leq \delta\}$, $\xi^0 = T_0(0)$, für $|\epsilon| \leq \epsilon_0$, ϵ_0 und δ hinreichend klein, in sich abbildet und kontrahierend ist: es existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$(42) \quad \|T_\epsilon(\xi') - T_\epsilon(\xi'')\|_E \leq |\epsilon| C \|\xi' - \xi''\|_E \quad \forall \xi', \xi'' \in K_\delta.$$

Ferner gilt

$$\|T_0(0) - T_\varepsilon(0)\|_\varepsilon = O(\varepsilon),$$

so daß man die Iteration (35) auch bei $\xi_0 = 0$ starten lassen kann für hinreichend kleines $|\varepsilon|$. Die gestörte Abbildung $T^*(\xi)$ genügt für hinreichend kleines δ ebenfalls einer Lipschitzbedingungen analog (42) mit einer Konstanten C^* . Der Einfachheit halber nehmen wir an: $C^* = C$, was eventuell zu einer Vergrößerung von C führt, damit zu einer Verkleinerung von ε_0 .

Wir wollen eine Abschätzung für $T_\varepsilon(\xi) - T_\varepsilon^*(\xi)$ liefern.

Hilfssatz 2.4

Vor: (i) Sei $L_0^* = L - f_{u\lambda}(\lambda_0^*, 0)$, $f_{u\lambda}^{0*} = f_{u\lambda}(\lambda_0^*, 0)$.

Bezeichne mit $\mathcal{L}^*$ den Differentialoperator

$$(44) \quad \mathcal{L}^* \xi = \begin{pmatrix} L_0^* v - f_{u\lambda}^{0*} \varphi^* \eta \\ \eta' \\ \mu' - \varphi^{*T} v \end{pmatrix}$$

mit Definitionsbereich $D(\mathcal{L}^*) = \{ \xi = (v, \eta, \mu) \in C_N^1[a, b] \mid B[v] = 0, \mu(a) = \mu(b) = 0 \}$.

$$(ii) \quad \langle f_{u\lambda}^0 \varphi, \varphi \rangle = a_0 \neq 0,$$

$$(iii) \quad \bar{g} \in C_N[a, b], \quad \bar{g} = (g, 0, 0), \quad g \in C_N[a, b].$$

Beh.: Löst man statt $\mathcal{L}\xi = \bar{g}$ die Aufgabe $\mathcal{L}^*\xi^* = \bar{g}$, so existiert für hinreichend kleines δ eine Konstante $K > 0$ mit

$$(45) \quad \|\xi - \xi^*\|_\varepsilon \leq K \|g\| \delta.$$

Beweis: (i) Betrachtet man statt $\mathcal{L}^*\xi^* = \bar{g}$ zunächst die Aufgabe

$$(46) \quad \begin{array}{lll} L_0^* \bar{v} - f_{u\lambda}^{0*} \varphi^* \bar{\eta} & = g, & B[\bar{v}] = 0 \\ \bar{\eta}' & = 0 \\ \bar{\mu}' - \varphi^{*T} \bar{v} & = 0, & \bar{\mu}(a) = \bar{\mu}(b) = 0 \end{array}$$

so gilt mit $\xi = (\nu, \gamma, \mu)$: $\eta = -\langle \nu, g \rangle / a_0$. Für hinreichend kleines δ ist $a_0^* = \langle \nu, f_{U\lambda}^{0*} \varphi^* \rangle \neq 0$, und man hat

$$|a_0^* - a_0| \leq K_1 \delta.$$

Es ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= -\langle \nu, g \rangle / a_0 - \langle \nu, g \rangle \sum_{i=1}^{\infty} [(a_0 - a_0^*) / a_0]^i - \langle \nu, f_U^0 - f_U^{0*} \rangle / a_0 \\ &\quad - \langle \nu, f_U^0 - f_U^{0*} \rangle \sum_{i=1}^{\infty} [(a_0 - a_0^*) / a_0]^i \end{aligned}$$

woraus $|\bar{\eta} - \eta| \leq \|g\| K_2 \delta$ folgt. Es gilt nun

$$\begin{aligned} L_0(\nu - \bar{\nu}) &= f_U^{0*} - f_U^0 + f_{U\lambda}^0 \varphi \eta - f_{U\lambda}^{0*} \varphi^* \bar{\eta}, \quad B[\nu - \bar{\nu}] = 0, \\ \langle \nu - \bar{\nu}, \varphi \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Daraus schließt man $\|\nu - \bar{\nu}\| \leq K_3 \|\eta\| \delta + \hat{K}_3 |\eta - \bar{\eta}| \leq \|g\| K_4 \delta$.

(ii) Statt (46) soll nun $\mathcal{L}^* \xi^* = \bar{g}$ betrachtet werden. ν^* unterscheidet sich von $\bar{\nu}$ nur durch Vielfache von φ : $\nu^* = \bar{\nu} + c\varphi$, $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $c = -\langle \bar{\nu}, \varphi^* - \varphi \rangle / \langle \varphi^*, \varphi^* \rangle$, also

$$|c| \leq K_5 \delta, \quad \|\nu^* - \bar{\nu}\| \leq K_6 \delta.$$

Mit $\eta^* = \bar{\eta}$ ergibt sich sofort

$$|\eta^* - \eta| \leq \|g\| K_2 \delta, \quad \|\nu^* - \nu\| \leq \|g\| K_7 \delta, \quad \|\mu^* - \mu\| \leq K_8 \delta,$$

woraus die Behauptung folgt. Zu bemerken ist noch, daß die Lösbarkeit von $\mathcal{L}^* \xi^* = \bar{g}$ und (46) natürlich für hinreichend kleine Störung gegeben ist.

q.e.d.

Hilfssatz 2.5

Vor.: $h_\varepsilon^*(\xi)$ bezeichne die gestörte rechte Seite in (35).

Beh.: Für hinreichend kleines δ gibt es eine Konstante $\hat{K}$ mit

$$(47) \quad \|h_\varepsilon^*(\xi) - h_\varepsilon(\xi)\|_E \leq \hat{K} \delta \quad \forall \xi \in K_\xi \quad \forall |\varepsilon| \leq \varepsilon_0.$$

Beweis: Wir schreiben die erste Komponente von $h_\varepsilon(\xi)$ in der Form

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 f_{u\lambda}(\lambda_0 + s\varepsilon\eta, t(\varepsilon\eta + \varepsilon^2 v)) ds dt (\eta + \varepsilon v) - f_{u\lambda}(\lambda_0, 0) \eta \\ & + \int_0^1 \int_0^1 f_{uu}(\lambda_0, st(\varepsilon\eta + \varepsilon^2 v)) s ds dt (\eta + \varepsilon v) (\eta + \varepsilon v), \end{aligned}$$

desgleichen die erste Komponente von $h_\varepsilon^*(\xi)$ mit λ_0 ersetzt durch λ_0^* u.s.w. Man bildet nun die Differenz dieser beiden Terme, schiebt mehrmals geeignete Größen dazwischen und schätzt unter mehrfacher Anwendung der Dreiecksungleichung ab.

q.e.d.

Es gilt nun für alle $\xi \in K_\delta$:

$$T_\varepsilon(\xi) - T_\varepsilon^*(\xi) = [\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{A}^{*-1}] h_\varepsilon(\xi) + \mathcal{A}^{*-1} [h_\varepsilon(\xi) - h_\varepsilon^*(\xi)],$$

folglich

$$(48) \quad \|T_\varepsilon(\xi) - T_\varepsilon^*(\xi)\|_\varepsilon \leq K \|h_\varepsilon(\xi)\| + \bar{K} \delta \leq D \delta \quad \forall \xi \in K_\delta \quad \forall |\varepsilon| \leq \varepsilon_0.$$

Man kann nun einen bekannten Satz aus der Theorie der Iterationsverfahren anwenden (vgl. COLLATZ [1] oder KRASNOSEL'SKII [1]), und es ergibt sich schließlich

Satz 2.9

- Vor.:
- (i) Es gelte (40), δ sei hinreichend klein;
 - (ii) $\langle r_{u\lambda}^0 \eta, \eta \rangle = a_0 \neq 0$;
 - (iii) es gelte (42) mit $\varepsilon_0 < 1$, $\varepsilon_0 > 0$.

Beh.: Die gestörte Iteration $\xi_{i+1}^*(\varepsilon) = T_\varepsilon^*(\xi_i^*(\varepsilon))$ ist für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, ε_0 hinreichend klein, unbeschränkt ausführbar. Die Folge $(\xi_i^*(\varepsilon))$ konvergiert gegen ein $\xi^*(\varepsilon) = (v^*(\varepsilon), \eta^*(\varepsilon), \mu^*(\varepsilon))$ mit

$$(49) \quad \|\xi^*(\varepsilon) - \xi(\varepsilon)\|_\varepsilon \leq D \delta / (1 - C|\varepsilon|),$$

wobei $\xi(\varepsilon)$ der Grenzwert der ungestörten Iteration ist. Für

$$u^*(\varepsilon) = \varepsilon \varphi^* + \varepsilon^{-2} v^*(\varepsilon) \quad \text{und} \quad \lambda^*(\varepsilon) = \lambda_0^* + \varepsilon \gamma^*(\varepsilon)$$

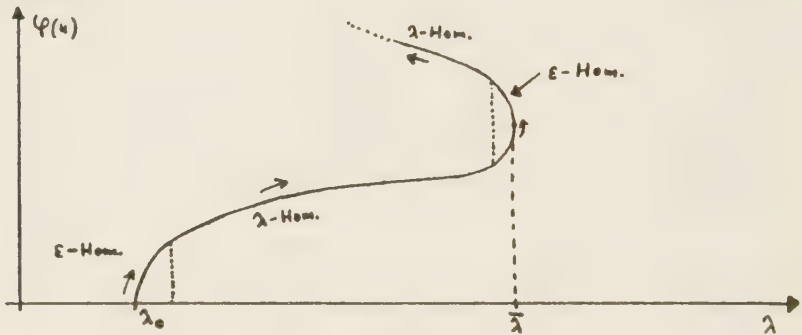
gilt

$$(50) \quad \begin{aligned} \|u^*(\varepsilon) - u(\varepsilon)\| &\leq \delta \left[|\varepsilon| + \varepsilon^2 \frac{D}{1-|\varepsilon|} \right], \\ |\lambda^*(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)| &\leq \delta \left[1 + |\varepsilon| \frac{D}{1-|\varepsilon|} \right]. \end{aligned}$$

2.8 VERFOLGUNG VON ZWEIGEN

Hat man die Lösung eines Verzweigungsproblems in der Nähe des Verzweigungspunktes mit Hilfe einer ε -Homotopie numerisch bestimmt - wir denken hier nicht nur an die Methoden in diesem Kapitel, sondern auch an ähnliche Vorgehensweisen in späteren Kapiteln - so wird man in einiger Entfernung vom Verzweigungspunkt normalerweise zu einer anderen Parametrisierung übergehen. Die einfachste und am wenigsten aufwendige Lösung ist die Parametrisierung

Abb. 2.1



nach λ . Man tastet sich in $\Delta\lambda$ -Schritten entlang der Kurve $u(\lambda)$ vor. Bei Problemen wie der Stabknickung aus Abschnitt 1.1 treten dabei in einiger Entfernung vom Verzweigungspunkt keinerlei Schwierigkeiten mehr auf. Es kann jedoch auch zu einer Situation wie in Abb. 2.1 kommen. In der Nähe von $\bar{\lambda}$ wird die Kondition des Problems der Berechnung von u in Abhängigkeit von λ schlecht, und man kann mit der λ -Parametrisierung nicht über den kritischen Punkt $\bar{\lambda}$ hinwegkommen.

Def. 2.1 (KELLER [3])

Ein Punkt $(\bar{\lambda}, \bar{u}) \in \mathbb{R} \times C_n[a, b]$ heißt normaler Grenzpunkt (Umkehrpunkt, Ausnahmepunkt), falls

$$(51) \quad \dim N(\bar{U}) = 1, \quad \rho_{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda}, \bar{u}) \notin R(\bar{U}),$$

wobei $\bar{L}$ der durch $L = f_{\bar{u}}(\bar{\lambda}, \bar{u})$ und $D(\bar{L}) = D(L)$ definierte lineare Differentialoperator ist.

$\bar{u} = u(\bar{\lambda})$ ist eine nichtisolierte Lösung von $Lu=f(\lambda, u)$, $B[u]=0$, d.h. die Linearisierung dieser Gleichung nach u an der Stelle $(\lambda, u) = (\bar{\lambda}, \bar{u})$ ist singular.

Zur Überwindung solcher Grenzpunkte kann man ebenfalls eine Umparametrisierung verwenden, die zu einer gut konditionierten Aufgabenstellung führt (vgl. CRANDALL & RABINOWITZ [2]). Sei

$$N(\bar{L}) = \text{span} \{ \bar{\varphi} \}, \quad \langle \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle = 1.$$

$N(\bar{L}^*)$ ist ebenfalls eindimensional: $N(\bar{L}^*) = \text{span} \{ \bar{\varphi} \}, \langle \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle = 1$. In der Nähe von $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ machen wir den Ansatz

$$(52) \quad \begin{aligned} \lambda(\varepsilon) &= \bar{\lambda} + \varepsilon^2 \tau(\varepsilon) \\ u(\varepsilon) &= \bar{u} + \varepsilon \bar{\varphi} + \varepsilon^2 z(\varepsilon), \quad \langle z(\varepsilon), \bar{\varphi} \rangle = 0 \end{aligned}$$

mit einem reellen Störungsparameter ε . Taylorentwicklung von f um $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ und Einsetzen von (52) in $Lu = f(\lambda, u)$ liefert

$$\begin{aligned} \bar{L}z(\varepsilon) &= \bar{F}_{\lambda} \tau(\varepsilon) + \bar{F}_{u\lambda} \tau(\varepsilon) (\varepsilon \bar{\varphi} + \varepsilon^2 z(\varepsilon)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{F}_{uu} (\bar{\varphi} + \varepsilon z(\varepsilon)) (\bar{\varphi} + \varepsilon z(\varepsilon)) + \frac{1}{2} \bar{F}_{\lambda\lambda} \varepsilon^2 \tau(\varepsilon)^2 \\ &\quad + \varepsilon^{-2} R(\bar{\lambda} + \varepsilon^2 \tau(\varepsilon), \bar{u} + \varepsilon \bar{\varphi} + \varepsilon^2 z(\varepsilon)) =: P[z(\varepsilon), \tau(\varepsilon); \varepsilon], \\ B[z(\varepsilon)] &= 0, \quad \langle z(\varepsilon), \bar{\varphi} \rangle = 0, \end{aligned}$$

wobei $R(\lambda, u)$ nur Terme dritter und höherer Ordnung in $\lambda - \bar{\lambda}$ und $u - \bar{u}$ enthält, $\bar{F}_{\lambda} := f_{\lambda}(\bar{\lambda}, \bar{u})$ u.s.u. Man definiert die RWA

$$(53) \quad \begin{aligned} \bar{L}z(\varepsilon) - P[z(\varepsilon), \tau(\varepsilon); \varepsilon] &= 0, \quad B[z(\varepsilon)] = 0 \\ \tau(\varepsilon)' &= 0 \\ \mu' - \bar{\varphi}^T z(\varepsilon) &= 0, \quad \mu(a) = \mu(b) = 0. \end{aligned}$$

Eine Lösung von (53) erzeugt via (52) eine Lösung von $Lu = f(\lambda, u)$, $B[u] = 0$. Für $\varepsilon = 0$ reduziert sich (53) auf

$$(54) \quad \begin{aligned} \bar{L}z(0) - \bar{F}_\lambda \tau(0) &= \frac{1}{2} \bar{F}_{uu} \bar{\varphi} \bar{\varphi}, \quad B[z(0)] = 0 \\ \tau(0)' &= 0 \\ \mu' - \bar{\varphi}^T z(0) &= 0, \quad \mu(a) = \mu(b) = 0. \end{aligned}$$

Ebenso wie in Hilfssatz 2.1 zeigt man, daß die homogene Gleichung (54) nur die triviale Lösung hat, falls $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ (51) erfüllt. Das Theorem über implizite Funktionen sichert dann die Existenz eines stetigen Lösungszweiges von $Lu = f(\lambda, u) = 0$, $B[u] = 0$ durch den Umkehrpunkt $(\bar{\lambda}, \bar{u})$, parametrisiert durch ε .

Es bleibt die Frage nach der Bestimmung von $\bar{\lambda}$, $\bar{u}$ und $\bar{\varphi}$. Hierzu sei die RWA

$$(55) \quad \begin{aligned} Lu - f(\lambda, u) &= 0, \quad B[u] = 0 \\ L\varphi - f_u(\lambda, u)\varphi &= 0, \quad B[\varphi] = 0 \\ \lambda' &= 0 \\ \delta' - \varphi^T \varphi &= 0, \quad \delta(a) = 0, \quad \delta(b) = 1 \end{aligned}$$

gegeben. Die gesuchten Größen erfüllen zusammen mit

$$\bar{\delta}(t) = \int_0^t \bar{\varphi}(s)^T \bar{\varphi}(s) ds$$

die RWA (55). Es gilt

Satz 2.9

Vor.: Es gelte (51), sei ferner $\tau(0) \neq 0$.

Beh.: $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\varphi}, \bar{\delta})$ ist isolierte Lösung von (55).

Beweis: Wir bilden die Linearisierung von (55) in der Lösung $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\varphi}, \bar{\delta})$.

$$[\psi - \bar{F}_\lambda \mu = 0, \quad \theta[\psi] = 0$$

$$[\psi - \bar{F}_{uu} \bar{\varphi} \psi - \bar{F}_{u\lambda} \bar{\varphi} \mu = 0, \quad \theta[\psi] = 0$$

(56)

$$\mu' = 0$$

$$\theta' - 2 \bar{\varphi}^T \psi = 0, \quad \theta(a) = \theta(b) = 0$$

Aus der ersten Zeile folgt wegen (51) $\mu \equiv 0$, also $\psi = c \bar{\varphi}$, $c \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$[\psi = c \bar{F}_{uu} \bar{\varphi} \bar{\varphi}, \quad \theta[\psi] = 0.$$

Gegen $\tau(0) \neq 0$ gilt nach (54): $\bar{F}_{uu} \bar{\varphi} \bar{\varphi} \notin R(\bar{\Gamma})$, d.h. $c = 0$ und $\psi = d \bar{\varphi}$, $d \in \mathbb{R}$. Die vierte Zeile impliziert $\langle \psi, \bar{\varphi} \rangle = 0$, folglich ist $d = 0$. Es existiert also keine nichttriviale Lösung von (56).

q.e.d.

Hat man die Nähe eines Umkehrpunktes erreicht, was durch die schlechter werdende Kondition bei Berechnung in Abhängigkeit von λ bemerkbar wird, so bestimmt man mit Hilfe der RWA (55) den kritischen Punkt $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ und $\bar{\varphi}$. Sodann benutzt man die RWA (53) und eine ε -Homotopie, um die Lösung in der Nähe dieses Punktes zu bestimmen. Ist die Schwierigkeit überwunden, kann man wieder auf eine λ -Homotopie umschalten.

In Kapitel 4 werden wir das hier geschilderte Vorgehen bei der Berechnungen von Zweigen durch nichtisolierte Lösungen von gestörten Verzweigungsproblemen benutzen.

Von KELLER [3] wurde kürzlich vorgeschlagen, die Lösung nach der Bogenlänge bzw. einer "Pseudobogenlänge" zu parametrisieren. Man hat dann ebenfalls keine Schwierigkeiten mit normalen Grenzpunkten.

Die genaue Bestimmung von normalen Grenzpunkten ist von großem Interesse im Zusammenhang mit Stabilitätsfragen bei zeitabhängigen Gleichungen der Form $\frac{du}{dt} = f(\lambda, u)$, vgl. auch CRANDALL & RABINOWITZ [2].

3 HOPFSCHES VERZWEIGUNG UND DER FALL MEHRFACHER EIGENWERTE

3.1 EIN ALLGEMEINERES PROBLEM

Wir betrachten hier folgendes, gegenüber 2.1 allgemeinere Problem. Gegeben ist die RWA

$$(1) \quad \begin{aligned} Lu &= f(\lambda, u), \quad a \leq t \leq b, \\ B[u] &= B_a u(a) + B_b u(b) = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist L wie in Kapitel 2, ferner

$$(2) \quad \begin{aligned} B_a, B_b &\in \mathbb{R}^{m,n}, \quad \text{Rang} [B_a \ B_b] = m, \quad m \geq n-1, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k, \\ k &= m-n+1, \quad f: \mathbb{R}^k \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad 0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \Omega \text{ offen,} \\ f &\text{ dreimal stetig differenzierbar auf } \mathbb{R}^k \times \Omega, \\ f(\lambda, 0) &= 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

$\lambda_0 \in \mathbb{R}^k$ sei so gewählt, daß der Differentialoperator L_0 - definiert durch $L = f_u(\lambda_0, 0)$ und $D(L_0) = \{y \in C_n^1[a, b] \mid B[y] = 0\}$ - einen eindimensionalen Nullraum besitzt:

$$(3) \quad \dim N(L_0) = 1, \quad N(L_0) = \text{span}\{\varphi\}, \quad \|\varphi\| = 1.$$

Der zu L_0 adjungierte Differentialoperator L_0^* nach (2.4) mit

$$\begin{aligned} P_a, P_b &\in \mathbb{R}^{2n-m,n}, \quad \text{Rang} [P_a \ P_b] = 2n-m, \\ B_a P_a^T - B_b P_b^T &= 0 \end{aligned}$$

hat dann einen Nullraum $N(L_0^*)$ mit (vgl. REID [1])

$$(4) \quad \begin{aligned} \dim N(L_0^*) &= k = m-n+1, \quad N(L_0^*) = \text{span}\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}, \\ \|\gamma_i\| &= 1, \quad i=1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Wir setzen voraus, daß die "Bifurkationsmatrix" $D \in \mathbb{R}^{k,k}$ mit

$$(5) \quad D_{ij} = \langle \psi_i, f_{u\lambda_j}(\lambda_0, 0)\varphi \rangle, \quad i, j=1, \dots, k$$

regulär ist.

f hat die Entwicklung

$$(6) \quad f(\lambda, u) = f_u^0 u + \sum_{i=1}^k f_{u\lambda_i}^0 (\lambda_i - \lambda_{0i}) u + Q(u) + R(\lambda, u)$$

mit entsprechend 2.2 gewählten Bezeichnungen. Die in $(\lambda_0, 0)$ abzweigende nichttriviale Lösung wird wieder in der Form

$$(7) \quad \begin{aligned} u(\varepsilon) &= \varepsilon \varphi + \varepsilon^2 v(\varepsilon), & v(\varepsilon) &\in N(L_0)^\perp, \\ \lambda(\varepsilon) &= \lambda_0 + \varepsilon \eta(\varepsilon), & \lambda(\varepsilon), \eta(\varepsilon) &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

angesetzt. Durch zu 2.2 analoges Vorgehen erhält man eine nichtlineare RWA der Dimension $N = n+k+1$:

$$(8) \quad \begin{aligned} L_0 v(\varepsilon) - \phi \eta(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^k \gamma_j(\varepsilon) f_{u\lambda_j}^0 v(\varepsilon) + Q(\varphi + \varepsilon v(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^2} \bar{R} \\ \eta(\varepsilon)' &= 0 \\ \mu' - \varphi^T v(\varepsilon) &= 0 \\ B[v(\varepsilon)] &= 0, \quad \mu(a) = \mu(b) = 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R(\lambda_0 + \varepsilon \eta(\varepsilon), \varepsilon \varphi + \varepsilon^2 v(\varepsilon)), \quad \eta(\varepsilon) \in C_k^1[a, b], \\ \bar{f} &= (f_{u\lambda_1}^0 \varphi, \dots, f_{u\lambda_k}^0 \varphi). \end{aligned}$$

An dieser Stelle zitieren wir den REID'schen Satz über die Bordering - Methode.

Hilfssatz 3.1

- Vor.: (i) L linearer Differentialoperator mit Definitionsbereich $D(L) = \{y \in C_n^1[a,b] \mid B_a y(a) + B_b y(b) = 0, B_a, B_b \in \mathbb{R}^{m,n}, \text{Rang}[B_a \ B_b] = m, 0 < m < 2n, \text{ und Differentialausdruck } Ly(t) = y'(t) - A(t)y(t), A \in C_{n \times n}[a,b];$
- (ii) L^* zu L adjungierter Differentialoperator mit $D(L^*) = \{z \in C_n^1[a,b] \mid P_a z(a) + P_b z(b) = 0\}$, $P_a, P_b \in \mathbb{R}^{2n-m,n}$, $\text{Rang}[P_a \ P_b] = 2n-m$, $B_a P_a^T - B_b P_b^T = 0$, $L^* z(t) = -z'(t) - A(t)^T z(t)$;
- (iii) $k = \dim N(L)$, $k^* = \dim N(L^*)$, also $k^* = m+k-n$, $Y_0 \in C_{n \times k}^1[a,b]$, $Z_0 \in C_{n \times k^*}^1[a,b]$, die Spalten von Y_0 spannen $N(L)$, die von Z_0 $N(L^*)$ auf;
- (iv) $\Phi \in C_{n \times k}[a,b]$, $\Psi \in C_{n \times k^*}[a,b]$ mit
- $$T = \langle \Phi, Y_0 \rangle, \quad S = \langle Z_0, \Psi \rangle$$
- regulär (G, H bedeutet $\int_a^b G(t)^T H(t) dt$ für $G, H \in C_{n \times 1}[a,b]$);
- (v) der lineare Differentialoperator $\mathcal{L}$ der Dimension $N = n+k+k^*$ sei definiert durch $D(\mathcal{L}) = \{(y, \xi, \mu) \mid y \in D(L), \xi \in C_{k^*}^1[a,b], \mu \in C_k^1[a,b], \mu(a) = \mu(b) = 0\}$ und

$$(9) \quad \mathcal{L} \gamma = \begin{pmatrix} Ly + \Psi \xi \\ \xi' \\ \mu' + \Phi^T y \end{pmatrix}$$

mit $\gamma_j = y_j, j=1, \dots, n; \gamma_{n+j} = \xi_j, j=1, \dots, k^*;$
 $\gamma_{n+k^*+j} = \mu_j, j=1, \dots, k$.

Beh.: $\mathcal{L}$ ist invertierbar.

Beweis: REID [2].

Wir hätten Hilfssatz 3.1 auch zum Beweis von Hilfssatz 2.1 benutzen können, haben aber dort aus Gründen der einfachen Darstellbarkeit darauf verzichtet.

Satz 3.1

Vor: Es gelte (1), (2) und (3), D aus (5) sei regulär.

Beh.: (i) Es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß die RWA (8) genau eine auf $(-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ definierte stetige Kurve von Lösungen $(v(\varepsilon), \gamma(\varepsilon), \mu(\varepsilon))$ besitzt.

(ii) Diese Lösungen sind für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ isoliert und r -mal stetig differenzierbar nach ε , falls $f \in C_n^r(\mathbb{R}^k \times \Omega)$ gilt.

(iii) Mit Hilfe des Ansatzes (7) erhält man hieraus einen Zweig von nichttrivialen Lösungen von (1), der die triviale Lösung in $(\lambda_0, 0)$ schneidet.

Beweis: Man wendet den Satz über implizite Funktionen an. Die Regularität der Fréchet - Ableitung im Punkt $\varepsilon = 0$ sichert Hilfssatz 3.1 mit $k = 1$, $k^* = k$, $Y_0 = \overline{\mathcal{D}} = \mathcal{Y}$, $Z_0 = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, $\mathcal{U} = \emptyset$ und wegen D aus (5) regulär.

q.e.d.

3.2 NUMERISCHE BEHANDLUNG DER HOPFSCHEN VERZWEIGUNG

Hopfsche Verzweigung ist die Verzweigung einer Familie von periodischen Lösungen eines autonomen Differentialgleichungssystems von einer stationären Lösung. Sie ist von großer Bedeutung für viele Probleme in Physik, Chemie und Biologie. Einen guten Überblick über Anwendungen gibt das Buch von MARSDEN & MCCracken [1].

Wir betrachten Randwertprobleme der Form

$$(10) \quad \frac{dy}{ds} = F(\mu, y), \quad y(0) = y(T),$$

wobei

$$(11) \quad \begin{aligned} &F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\mu, 0) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad T \text{ unbekannte} \\ &\text{Periode, } \mu \text{ Verzweigungsparameter, } F \text{ dreimal} \\ &\text{stetig differenzierbar in einer Umgebung von} \\ &(\mu, y) = (\mu_0, 0). \end{aligned}$$

Führt man durch $t = 2\pi s/T$ eine neue Variable ein, so erhält man

$$(12) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{T}{2\pi} F(\mu, y), \quad y(0) - y(2\pi) = 0.$$

Wir entwickeln F in der Form

$$(13) \quad F(\mu, y) = F_y^0 y + F_y^0(\mu - \mu_0) y + Q(y) + R(\mu, y)$$

wobei $F_y^0 := F_y(\mu_0, 0), \dots, Q(y) := F_{yy}^0 yy$ und R ein Restglied von dritter Ordnung ist.

Das zu (12) linearisierte Problem lautet

$$(14) \quad \frac{dY}{dt} - \frac{T}{2\pi} F_y^0 Y = 0, \quad Y(0) - Y(2\pi) = 0.$$

(14) hat genau dann eine nichtkonstante Lösung, falls F_y^0

ein Paar von konjugiert komplexen, rein imaginären Eigenwerten $\pm i\beta$, $\beta > 0$, hat. Wir setzen dies im folgenden voraus.

Sei $T_0 = 2\pi/\beta$, dann hat (14) mit $T = T_0$ ein linear unabhängiges Paar von 2π -periodischen Lösungen. Sei $i\beta$ algebraisch einfacher Eigenwert von F_y^0 und habe F_y^0 keine Eigenwerte der Form $ki\beta$, $k \in \{0, 2, 3, 4, \dots\}$. Dann ist der Nullraum von (14) zweidimensional. Falls $c = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, Eigenvektor zu $i\beta$ ist, so ist eine reelle Basis des Nullraums von (14) gegeben durch

$$(15) \quad \begin{aligned} \varphi_1(t) &= a \cos t - b \sin t = \operatorname{Re}[e^{it}c], \\ \varphi_2(t) &= a \sin t - b \cos t = \operatorname{Im}[e^{it}c]. \end{aligned}$$

c wird normalisiert durch $a^T a + b^T b = 2$. $\{a, b\}$ ist notwendigerweise linear unabhängig.

Sei $e \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, daß seine Projektion auf $\operatorname{span}\{a, b\}$ ungleich Null ist. Dann gibt es eine eindeutige (bis aufs Vorzeichen) Lösung ψ von (14) mit $\langle \psi, \psi \rangle = 1$ und

$$(16) \quad e^T \psi(0) = 0.$$

Wir nehmen (16) mit in die Randbedingungen auf:

$$(17) \quad B_0 := \begin{bmatrix} I \\ e^T \end{bmatrix}, \quad B_2 := \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1, n}$$

Die zusätzliche Randbedingung (16) dient zur Beseitigung folgender Redundanz: die allgemeine Lösung $\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t)$ von (14) kann ja in der Gestalt $\alpha \varphi_1(t+\gamma)$ geschrieben werden. γ stellt nur eine Zeitverschiebung dar, die bei autonomen Systemen immer möglich ist, jedoch keine wesentlich neue Lösung ergibt.

Wir ersetzen (12) und (14) durch

$$(18a) \quad y' = \frac{T}{2\pi} F(\mu, y), \quad B_0 y(0) + B_{2\pi} y(2\pi) = 0,$$

$$(18) \quad \psi' - \frac{1}{\beta} F_y^0 \psi = 0, \quad B_0 \psi(0) + B_{2\pi} \psi(2\pi) = 0.$$

Wegen $e \neq 0$ ist $\text{Rang}[B_0 \ B_{2\pi}] = n+1$. Das zu (18b) adjungierte Problem ist

$$(19) \quad -\psi' - \frac{1}{\beta} (F_y^0)^T \psi = 0, \quad P_0 \psi(0) + P_{2\pi} \psi(2\pi) = 0,$$

$P_0, P_{2\pi} \in \mathbb{R}^{n-1, n}$. Die Zeilen von P_0 spannen $e^\perp$ auf, und es gilt $P_{2\pi} = -P_0$. (19) hat notwendigerweise einen zweidimensionalen Nullraum. Eine Basis ist gegeben durch (LANGFORD [2]):

$$(20) \quad \psi_1 = (SS^T)^{-1}, \quad \psi_2 = (SS^T)^{-1} \frac{d\psi}{dt}, \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1,$$

wobei S eine $n \times n$ - Matrix ist, die F_y^0 auf die Form

$$S^{-1} F_y^0 S = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \beta & \theta \\ -\beta & 0 & \\ \hline \theta & & c \end{array} \right]$$

mit $c \in \mathbb{R}^{n-2, n-2}$ transformiert. Falls F_y^0 normal ist, kann man $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \psi'$ wählen.

Nach Voraussetzung ist $F_y(\mu, 0)$ stetig differenzierbar nach μ in der Nähe von μ_0 . Sei $\delta(\mu)$ der differenzierbare Eigenwert von $F_y(\mu, 0)$ mit $\delta(\mu_0) = i\beta$. Definiere

$$\alpha' = \text{Re}[\delta'(\mu_0)], \quad \beta' = \text{Im}[\delta'(\mu_0)].$$

Hilfssatz 3.2

Vor.: Seien die bisher gemachten Voraussetzungen erfüllt.

Beh.: Es gilt

$$(21) \quad \begin{aligned} \langle \psi, \psi_1 \rangle &= 1, & \langle \psi, \psi_2 \rangle &= 0, \\ \langle F_y^0 \psi, \psi_1 \rangle &= 0, & \langle F_y^0 \psi, \psi_2 \rangle &= \beta, \\ \langle F_{y\mu}^0 \psi, \psi_1 \rangle &= \alpha', & \langle F_{y\mu}^0 \psi, \psi_2 \rangle &= \beta'. \end{aligned}$$

Beweis: LANGFORD [2].

Wir hielten uns bisher in Abschnitt 3.2 recht eng an LANGFORD [2]. In HOPF's grundlegender Arbeit von 1942 (eine Übersetzung findet sich in MARSDEN & MCCrackEN) sind die wesentlichen Voraussetzungen für Bifurkation: $\beta > 0$ und $\alpha' \neq 0$.

Satz 3.2

Vor.: Alle in Abschnitt 3.2 gemachten Voraussetzungen seien erfüllt. Es gelte $\alpha' \neq 0$ und $\beta > 0$.

Beh.: Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß die RWA (18a) für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ eine stetige Kurve von Lösungen der Form

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &= \varepsilon \psi + \varepsilon^2 v(\varepsilon), & \langle v(\varepsilon), \psi \rangle &= 0 \\ (22) \quad \mu(\varepsilon) &= \mu_0 + \varepsilon \bar{\eta}(\varepsilon), & \bar{\eta}(0) &= 0 \\ T(\varepsilon) &= 2\pi/\beta + \varepsilon \tau(\varepsilon), & \tau(0) &= 0, \end{aligned}$$

hat. Diese Lösungen werden definiert durch die Lösungen der nichtlinearen RWA (8) mit $k = 2$, $\lambda = (\mu, T)^T$, $F(\lambda, u) = \frac{T}{2\pi} F(\mu, u)$, $\eta_1(\varepsilon) = \bar{\eta}(\varepsilon)$, $\eta_2(\varepsilon) = \tau(\varepsilon)$, $Lu(t) = u'(t)$.

Beweis: Aus (21) folgt für die Bifurkationsmatrix D aus

$$(5): \quad \det D = \begin{vmatrix} \alpha' & 0 \\ \beta' & \beta \end{vmatrix} = \alpha' \beta \neq 0.$$

Die Behauptung folgt dann aus Satz 3.1 bis auf $\bar{\eta}(0) = \tau(0) = 0$. Dies wurde von LANGFORD [2] zusätzlich gezeigt.

q.e.d.

Die numerische Behandlung erfolgt wie in Kapitel 2 durch Anwendung von Standardverfahren auf die gemäß Satz 3.2 definierte RWA (8). Man kann natürlich auch analog zu Abschnitt 2.5 ein Iterationsverfahren definieren und dieses diskretisieren.

Macht man die Transformation $t = 2\pi s/T$ rückgängig, so erhält man durch $y(\varepsilon; s) = u(\varepsilon; T(\varepsilon)s/2\pi)$ für $\mu = \mu(\varepsilon)$ periodische Lösungen von (10) der Periode $T(\varepsilon)$.

3.3 VERZWEIGUNG BEI MEHRFACHEN EIGENWERTEN

Nachdem wir die Bifurkation von der trivialen Lösung bei "einfachen" Eigenwerten und den verwandten Fall der Hopf - Verzweigung eingehend behandelt haben, wollen wir hier auf den Fall "mehrfacher" Eigenwerte eingehen. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die theoretischen Untersuchungen von KELLER & LANGFORD [1] und DEMOULIN & CHEN [1].

Wir beschäftigen uns weiterhin mit der RWA (2.1), (2.2). Nur die Vielfachheit des "Eigenwertes" λ_0 soll nun größer als eins sein:

$$(23) \quad \begin{aligned} \dim N(L_0) &= r, & N(L_0) &= \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}, & r \geq 2, \\ \dim N(L_0^*) &= r, & N(L_0^*) &= \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_r\} \end{aligned}$$

mit $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j=1, \dots, r$.

Wir schreiben (2.1) in der Form

$$(24) \quad [L - f_U^0]u = f(\lambda, u) - f_U^0 u, \quad B[u] = 0.$$

f habe die Entwicklung

$$(25) \quad f(\lambda, u) = f_U(\lambda, 0)u + Q(\lambda, u) + R(\lambda, u)$$

$$\text{mit } Q(\lambda, u) = \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial^{p+1}}{\partial u^{p+1}} f(\lambda, 0) \underbrace{uu \dots u}_{p+1}.$$

$R(\lambda, u)$ ist von der Ordnung $p+2$ in u . p sei maximal gewählt. Für in $(\lambda_0, 0)$ abzweigende nichttriviale Lösungen machen wir den Ansatz von KELLER & LANGFORD [1]

$$(26) \quad \begin{aligned} u(\varepsilon) &= \varepsilon \varphi_0(\varepsilon) + \varepsilon^{p+1} v(\varepsilon), & v(\varepsilon) &\in N(L_0)^\perp, \\ \lambda(\varepsilon) &= \lambda_0 + \varepsilon^p \gamma(\varepsilon), \\ \varphi_0(\varepsilon) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\varepsilon) \varphi_i, \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i(\varepsilon)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (26) in (24) unter Verwendung von (25) ergibt sich

$$(27) \quad \begin{aligned} L_0 v(\varepsilon) &= \varepsilon^{-p} \left\{ f_U(\lambda_0 + \varepsilon^p \eta(\varepsilon), 0) - f_U(\lambda_0, 0) \right\} (\varphi_0(\varepsilon) + \varepsilon^p v(\varepsilon)) \\ &+ Q(\lambda_0 + \varepsilon^p \eta(\varepsilon), \varphi_0(\varepsilon) + \varepsilon^p v(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} R(\lambda_0 + \varepsilon^p \eta(\varepsilon), \varepsilon \varphi_0(\varepsilon) + \varepsilon^{p+1} v(\varepsilon)) \\ \langle v, \varphi_i \rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, r; \quad B[v(\varepsilon)] = 0. \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (27) ist

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i, \varepsilon^{-p} \{ f_U(\lambda_0 + \varepsilon^p \eta(\varepsilon), 0) - f_U^0 \} (\varphi_0(\varepsilon) + \varepsilon^p v(\varepsilon)) \\ + Q(\lambda_0 + \varepsilon^p \eta(\varepsilon), \varphi_0(\varepsilon) + \varepsilon^p v(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} R(\lambda_0 + \varepsilon^p \eta(\varepsilon), \varepsilon \varphi_0(\varepsilon) + \varepsilon^{p+1} v(\varepsilon)) \rangle = 0, \\ i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(\varepsilon)^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ reduziert sich dieses Gleichungssystem auf

$$(28) \quad \begin{aligned} \langle \varphi_i, f_U^0 \eta(0) \sum_{i=1}^r \alpha_i(0) \varphi_i + Q(\lambda_0, \sum_{i=1}^r \alpha_i(0) \varphi_i) \rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i(0)^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

(28) stellt ein polynomiales Gleichungssystem vom Höchstgrad $p+1$ in den Unbekannten $\eta(0)$, $\alpha_1(0)$, ..., $\alpha_r(0)$ dar. Man nennt (28) "algebraische Bifurkationsgleichungen". Sie spielen eine fundamentale Rolle bei der Untersuchung von Verzweigungsproblemen mit mehrfachen Eigenwerten.

(28) wird zusammengefaßt als

$$g(x) = 0, \quad g: \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}, \quad x = (\eta, \alpha_1, \dots, \alpha_r)^T \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

Wir setzen ferner $\Phi := (\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in C_{n \times r}^1[a, b]$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)^T \in \mathbb{R}^r$. Es soll nun eine nichtlineare RWA

konstruiert werden, als deren isolierte Lösungen man $v(\varepsilon)$, $\gamma(\varepsilon)$, $\alpha_1(\varepsilon)$ unter entsprechenden Voraussetzungen gewinnen kann. Wir definieren diese RUA der Dimension $N = n+2r+1$ durch

$$\begin{aligned} L_0 v(\varepsilon) - \varepsilon^{-p} \{ f_U(\lambda_0 + \gamma(\varepsilon), 0) - f_U^0 \} (\Phi \alpha(\varepsilon) + \varepsilon^p v(\varepsilon)) = \\ Q(\lambda_0 + \varepsilon^p \gamma(\varepsilon), \Phi \alpha(\varepsilon) + \varepsilon^p v(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} R(\lambda_0 + \varepsilon^p \gamma(\varepsilon), \Phi \alpha(\varepsilon) + \varepsilon^{p+1} v(\varepsilon)) \\ (29a) \quad \gamma(\varepsilon)' = 0 \\ \alpha(\varepsilon)' = 0 \\ \mu' - \Phi^T v(\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

mit $\mu, \alpha(\varepsilon) \in C^1[a, b]$, $\gamma(\varepsilon) \in C^1[a, b]$ und Randbedingungen

$$(29b) \quad B[v(\varepsilon)] = 0, \mu(a) = \mu(b) = 0, \alpha(\varepsilon; a)^T \alpha(\varepsilon; a) - 1 = 0.$$

Wir sind dabei ähnlich wie in Abschnitt 2.2 vorgegangen. Man sieht sofort, daß die Aufgabenstellungen (27) und (29) zur Bestimmung von v, γ und α äquivalent sind.

An der Stelle $\varepsilon = 0$ reduziert sich (29) auf

$$\begin{aligned} L_0 v(0) = f_{U\lambda}^0 \gamma(0) \Phi \alpha(0) + Q(\lambda_0, \Phi \alpha(0)) \\ \gamma(0)' = 0 \\ (30) \quad \alpha(0)' = 0 \\ \mu' - \Phi^T v(0) = 0 \\ B[v(0)] = 0, \mu(a) = \mu(b) = 0, \alpha(0; a)^T \alpha(0; a) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Hilfssatz 3.3

Vor.: (1) Für (2.1) gelte (2.2), (23) und (25).

- (ii) $x^* = (\gamma^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_r^*)^T$ sei isolierte Lösung der algebraischen Bifurkationsgleichungen, d.h. $g(x^*) = 0$, $\det(\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)) \neq 0$.

Beh.: Es gibt eine eindeutig bestimmte isolierte Lösung $(v_0, \gamma_0, \alpha_0, \mu_0)$ von (30) mit $\gamma_0 = \gamma^*$, $\alpha_0 = \alpha^*$.

Beweis: Setzt man auf der rechten Seite von (30) $\gamma \equiv \gamma^*$ und $\alpha \equiv \alpha^*$ ein, so ergibt sich eine lineare RWA für v_0 und μ_0 . Wegen

$$\langle \psi_i, f_{u\lambda}^0 \gamma^* \Phi \alpha^* + Q(\lambda_0, \Phi \alpha^*) \rangle = 0, \quad i=1, \dots, r$$

und der Orthogonalitätsbedingung existiert v_0 und ist eindeutig bestimmt, natürlich auch μ_0 . Wir bilden nun die Linearisierung von (30) in $(v_0, \gamma_0, \alpha_0, \mu_0)$:

$$L_0 \tilde{v} = \tilde{\gamma} f_{u\lambda}^0 \Phi \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \gamma_0 f_{u\lambda}^0 \varphi_i \tilde{\alpha}_i + \sum_{i=1}^r Q_U(\lambda_0, \Phi \alpha_0) \varphi_i \tilde{\alpha}_i$$

$$\tilde{\gamma}' = 0$$

$$(31) \quad \tilde{\alpha}' = 0$$

$$\tilde{\mu}' - \Phi^T \tilde{v} = 0, \quad \theta[\tilde{v}] = 0, \quad \tilde{\mu}(a) = \tilde{\mu}(b) = 0, \quad 2 \alpha_0^T \tilde{\alpha}(a) = 0.$$

Die Isoliertheitsvoraussetzung an x^* besagt, daß die Matrix

$$(32) \quad \left[\begin{array}{c|ccc} \vdots & & & \\ \langle \psi_i, f_{u\lambda}^0 \Phi \alpha_0 \rangle & \dots & [\langle \psi_i, \gamma_0 f_{u\lambda}^0 \varphi_j \rangle + \langle \psi_i, Q_U(\lambda_0, \Phi \alpha_0) \varphi_j \rangle] & \dots \\ \vdots & & & \\ \hline 0 & \dots & 2 \alpha_{0j} & \dots \end{array} \right]$$

regulär ist. Aus (31) folgt $v \in N(L_0)^\perp$. Deshalb kann nur dann eine nichttriviale Lösung von (31) existieren, wenn die rechte Seite der ersten Zeile von (31) in $R(L_0)$ liegt und ungleich Null ist. Es muß also ein Vektor $0 \neq (\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}^T)^T \in \mathbb{R}^{r+1}$ mit

$$\langle \psi_i, \tilde{\gamma} f_{u\lambda}^0 \Phi \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \gamma_0 f_{u\lambda}^0 \varphi_i \tilde{\alpha}_i + \sum_{i=1}^r Q_U(\lambda_0, \Phi \alpha_0) \varphi_i \tilde{\alpha}_i \rangle = 0,$$

für $i = 1, \dots, r$ und $2 \alpha_0^T \tilde{\alpha} = 0$ existieren. Dies steht im

Widerspruch zur Regularität von (32), folglich ist $\tilde{\gamma} = 0$, $\tilde{\alpha} = 0$, damit $\tilde{v} \equiv 0$ und $\tilde{\mu} = 0$. Es gibt also keine nicht-triviale Lösung von (31), d.h. $(v_0, \gamma_0, \alpha_0, \mu_0)$ ist isoliert.
q.e.d.

Unser Ergebnis lautet nun

Satz 3.3

Vor.: (i) Für die RWA $Lu = f(\lambda, u)$, $B[u] = 0$ gelte (2.2), (23) und (25).

(ii) $x^* = (\gamma^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_r^*)^T$ isolierte Lösung der algebraischen Bifurkationsgleichungen (28).

Beh.: Es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß die RWA (29) für $(-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$ eine stetige Kurve von isolierten Lösungen $(v(\varepsilon), \gamma(\varepsilon), \alpha(\varepsilon), \mu(\varepsilon))$ hat, aus denen man in der Form

$$u(\varepsilon) = \varepsilon \Phi \alpha(\varepsilon) + \varepsilon^{p+1} v(\varepsilon)$$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \gamma(\varepsilon; a)$$

einen stetigen Zweig von nichttrivialen Lösungen von $Lu = f(\lambda, u)$, $B[u] = 0$ erhält, der in $(\lambda_0, 0)$ von der trivialen Lösung abzweigt.

Beweis: Zu x^* wird nach Hilfssatz 3.3 die Lösung $(v(0), \gamma(0), \alpha(0), \mu(0))$ von (29) an der Stelle $\varepsilon = 0$, d.h. von (30) konstruiert - sie ist in gewissem Sinne asymptotisch an den hier gefundenen Zweig. Aus der Regularität der Linearisierung von (29) in $(v(0), \gamma(0), \alpha(0), \mu(0))$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ folgt mit Hilfe des Theorems über implizite Funktionen die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkungen

- 1) Man erhält nicht zu jeder isolierten Lösung der algebraischen Bifurkationsgleichungen einen neuen Zweig, vgl. KELLER & LANGFORD [1].
- 2) Es soll an dieser Stelle ausdrücklich daraufhin

gewiesen werden, daß die Hauptschwierigkeit bei Verzweigungsproblemen mit mehrfachen Eigenwerten nicht in der Konstruktion eines Zweiges zu gegebener isolierter Lösung x^* der algebraischen Bifurkationsgleichungen liegt, sondern in der numerischen Bestimmung (aller) dieser isolierten Lösungen. Zu dieser Problematik vgl. KELLER & LANGFORD [1]. Ein vielleicht recht brauchbares Verfahren für solche Fälle hat DREXLER [1] untersucht.

Ein Existenzbeweis stammt von KRASNOSEL'SKII:

Satz 3.4

Vor.: Die Matrix $C = (C_{ij})$, $C_{ij} = \langle \psi_i, F_{U\lambda}^0 \psi_j \rangle$, $i, j=1, \dots, r$, sei regulär, r sei ungerade.

Beh.: Die algebraischen Bifurkationsgleichungen haben eine Lösung $x^* \in \mathbb{R}^{r+1}$.

Beweis: KELLER & LANGFORD [1].

Die numerische Behandlung von (29) - etwa mit Differenzenverfahren - ist bei Kenntnis von x^* nach dem in den bisherigen Kapiteln gesagten nun Standard. Ein Wort zur Anfangsnäherung: Man setzt γ^* und α^* in (30) ein und gewinnt damit eine lineare RWA zur Bestimmung von $v(0)$ und $\mu(0)$. Ausgehend von $v(0)$, $\eta(0) = \gamma^*$, $\alpha(0) = \alpha^*$ und $\mu(0)$ benutzt man dann eine ε -Homotopie.

Anstatt $(\gamma^*, \alpha^{*T})^T$ zu suchen, kann man auch versuchen, mit Näherungsmethoden Lösungen von (30) zu berechnen und diese a posteriori auf ihre Isoliertheit zu untersuchen, vgl. WEBER [1].

4 GESTÖRTE VERZWEIGUNG UND NUMERISCHE BEHANDLUNG

4.1 MOTIVATION UND PROBLEMSTELLUNG

In vielen Fällen reicht die klassische Bifurkations-
theorie nicht zur vollständigen Klärung der auftreten-
den physikalischen Phänomene aus. Dies ist häufig auf
kleine Abweichungen von der idealen Konfiguration
zurückzuführen, die nicht in Einklang mit den Voraus-
setzungen der mathematischen Theorie stehen. So werden
oft sogenannte "Anfangsstörungen" (initial imperfections)
nicht in die Überlegungen einbezogen, die etwa dazu
führen können, daß ein Stab oder eine Platte in Ruhe-
lage nicht genau plan liegt, d.h. nicht genau die tri-
viale Lösung einnimmt. Der Grund dafür können Unvoll-
kommenheiten des Materials, Gravitationskräfte etc. sein.

Bezieht man solche Störungen mit ein in die mathe-
matische Formulierung des Problems, so gelangt man zur
Theorie der gestörten Verzweigung. Es gibt verschiedene
Wege der mathematischen Behandlung solcher Probleme,
vgl. COHEN [1] , KEENER & KELLER [1] , KEENER [1], [2]
CHOW , HALE & MALLET-PARET [1], [2].

Man betrachtet Gleichungen vom Typ

$$(1) \quad F(\lambda, \tau, u) = 0,$$

wobei $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times B_1 \longrightarrow B_2$; B_1, B_2 Banachräume und

$$F(\lambda, 0, 0) = 0, \quad F_\tau(\lambda, 0, 0) \neq 0.$$

τ wird als Störungsparameter betrachtet. Im ungestörten
Fall, $\tau = 0$, hat (1) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die triviale Lösung.
Für $\tau \neq 0$ besitzt (1) nicht länger die triviale Lösung,
und die ganze Lösungsstruktur kann sich grundlegend
ändern. Einen Eindruck davon vermittelt folgendes ein-
fache

Beispiel (KEENER & KELLER [1])

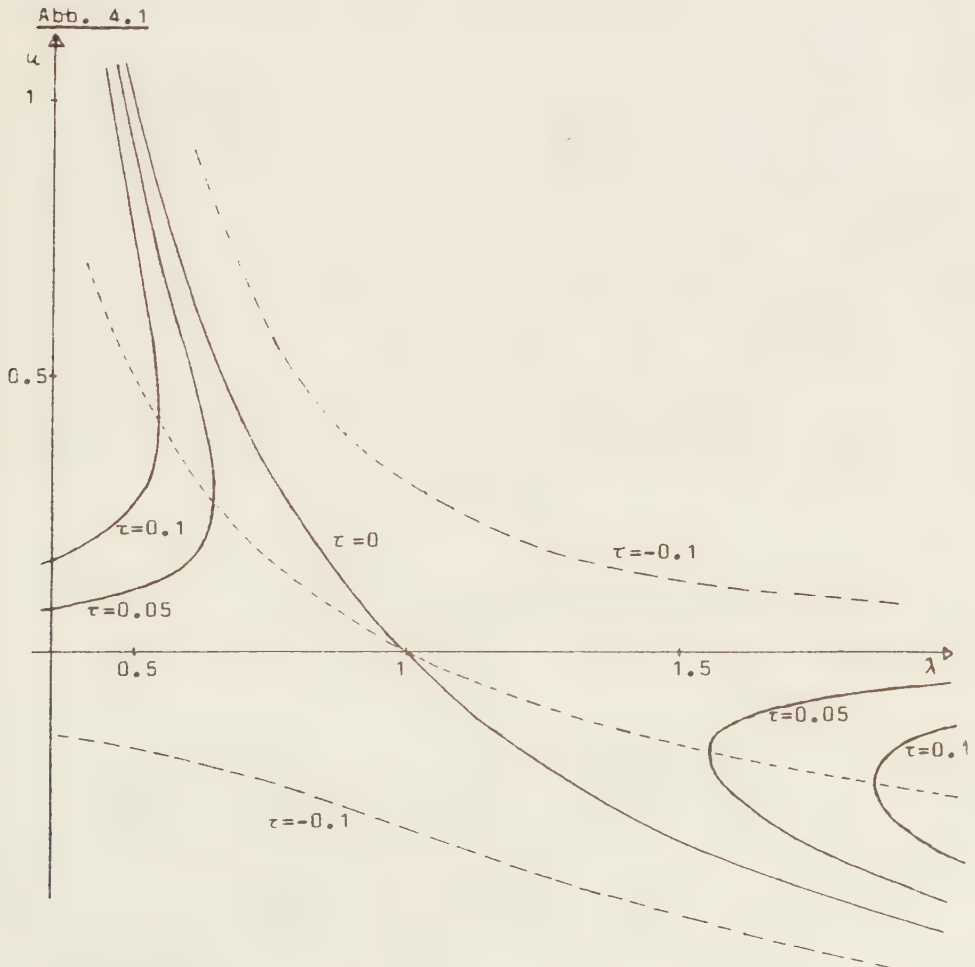
$$F(\lambda, \tau, u) = u - \lambda u(1+u) - \tau, \quad u, \lambda, \tau \in \mathbb{R}.$$

Für $\tau = 0$ hat $F(\lambda, 0, u) = 0$ die Lösungen

$$u(\lambda) \equiv 0 \quad \text{und} \quad u(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - 1.$$

Für $\tau \neq 0$ ergibt sich

$$u(\lambda)_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right)^2 - 4 \frac{\tau}{\lambda}} \right].$$



Die den Verzweigungspunkt $(1,0)$ schneidende gestrichelte Kurve in Abb. 4.1 stellt nichtisolierte Lösungen dar, d.h. dort ist $F_U(\lambda, \tau, u(\lambda, \tau)) = 0$. Man erkennt an diesem einfachen Beispiel die Empfindlichkeit des Lösungsverhaltens von (1) gegenüber kleinen Störungen. Für $\tau \neq 0$ tritt hier gar keine Verzweigung mehr auf. Es ist deshalb gerechtfertigt, von singulären Störungen zu sprechen. Es soll noch bemerkt werden, daß neben der strukturellen Änderung des Lösungsverhaltens quantitativ nur kleine Änderungen der Lösung bei kleinen Störungen in τ auftreten (bei festem λ).

Im folgenden untersuchen wir die numerische Behandlung gestörter Verzweigungsprobleme bei gewöhnlichen RWA'n. Dabei legen wir die KEENER'sche Vorgehensweise zugrunde. Wir betrachten nichtlineare RWA'n der Form

$$(2) \quad Lu = f(\lambda, \tau, u), \quad B[u] = B_a u(a) + B_b u(b) = 0$$

mit L, B wie in 2.1. Es gelte weiter

$$(3) \quad \begin{aligned} & f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega \text{ offen}, 0 \in \Omega, f \text{ dreimal} \\ & \text{stetig differenzierbar auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega, f(\lambda, 0, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ & f(\lambda, \tau, 0) \neq 0 \quad \forall \tau \neq 0. \end{aligned}$$

Der Differentialoperator L_0 , definiert durch $L = f_U(\lambda_0, 0, 0)$ und B , habe einen einfachen Eigenwert Null:

$$(4) \quad \dim N(L_0) = 1, \quad N(L_0) = \text{span}\{\psi_0\}.$$

Es gilt dann ebenfalls

$$\dim N(L_0^*) = 1, \quad N(L_0^*) = \text{span}\{\psi_0^*\}, \quad R(L_0) = N(L_0^*)^\perp.$$

und

$$f_\lambda(\lambda, 0, 0) = f_{\lambda\lambda}(\lambda, 0, 0) = f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda, 0, 0) = 0$$

Ferner gelte

$$(5) \quad \langle \psi_0, f_{u\lambda}^0 \psi_0 \rangle = a_0 \neq 0, \quad \langle \psi_0, f_\tau^0 \rangle = b_0 \neq 0,$$

wobei $f_{u\lambda}^0 := f_{u\lambda}(\lambda_0, 0, 0)$, u.s.w.

Im Fall $\tau = 0$ liegt der in Kapitel 2 behandelte Verzweigungsfall vor. Komplizierter wird es im Fall $\tau \neq 0$.

4.2 NICHTISOLIERTE LÖSUNGEN

Mit KEENER & KELLER [1] bezeichnen wir nun das Quadrupel $(\lambda, \tau, u, \varphi)$ als nichtisolierte Lösung von (2), falls gilt

$$(6) \quad \begin{aligned} L u - f(\lambda, \tau, u) &= 0, \quad B[u] = 0 \\ L \varphi - f_u(\lambda, \tau, u) \varphi &= 0, \quad B[\varphi] = 0, \quad \varphi \neq 0. \end{aligned}$$

Im Verzweigungspunkt ist eine solche nichtisolierte Lösung gegeben durch $(\lambda_0, 0, 0, \varphi)$. Es soll zunächst die Auswirkung der Störung $\tau \neq 0$ auf den "kritischen" Punkt $(\lambda_0, 0)$ untersucht werden. Wir suchen eine Kurve von nichtisolierten Lösungen, die $(\lambda_0, 0, 0, \varphi)$ enthält und setzen diese, parametrisiert nach einem Störungsparameter ε , in der Form

$$(7) \quad \begin{aligned} u(\varepsilon) &= \varepsilon \varphi_0 + \varepsilon^2 v(\varepsilon), \quad v(\varepsilon) \in N(L_0)^\perp \\ \varphi(\varepsilon) &= \varphi_0 + \varepsilon \chi(\varepsilon), \quad \chi(\varepsilon) \in N(L_0)^\perp \\ \lambda(\varepsilon) &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\varepsilon) \\ \tau(\varepsilon) &= \varepsilon^2 \tau_1(\varepsilon) \end{aligned}$$

an. Unter Verwendung der Identität

$$g(a) - g(b) = \int_a^b \frac{dg}{dx}(sa + [1-s]b) ds$$

erhält man durch Einsetzen nach kurzer Rechnung

$$(8a) \quad \begin{aligned} L_0 v(\varepsilon) &= \varepsilon^{-2} [f(\lambda, \tau, u(\varepsilon)) - f_u^0 u(\varepsilon)] = \\ &= \tau_1(\varepsilon) \int_0^1 f_{\tau}(\lambda(\varepsilon), s\tau(\varepsilon), u(\varepsilon)) ds + \lambda_1(\varepsilon) \int_0^1 \int_0^1 f_{\lambda u}(\lambda_0 + s\varepsilon \lambda_1(\varepsilon), 0, t u(\varepsilon)) ds dt \\ &\quad - (\varphi_0 + \varepsilon v(\varepsilon)) + \int_0^1 \int_0^1 f_{uu}(\lambda_0, 0, s t u(\varepsilon)) s dt ds (\varphi_0 + \varepsilon v(\varepsilon)) (\varphi_0 + \varepsilon v(\varepsilon)) \\ &=: P[v(\varepsilon), \lambda_1(\varepsilon), \tau_1(\varepsilon); \varepsilon], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_0 \chi(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left[f_U(\lambda(\varepsilon), \tau(\varepsilon), u(\varepsilon)) - f_U^0 \right] (\varphi_0 + \varepsilon \chi(\varepsilon)) = \\
 &\lambda_1(\varepsilon) \int_0^1 f_{U\lambda}(\lambda_0 + s\varepsilon \lambda_1(\varepsilon), 0, u(\varepsilon)) ds + \varepsilon \tau_1(\varepsilon) \int_0^1 f_{\tau U}(\lambda(\varepsilon), s\tau(\varepsilon), u(\varepsilon)) ds \\
 (8b) \quad &+ \int_0^1 f_{UU}(\lambda_0, 0, su(\varepsilon)) ds (\varphi_0 + \varepsilon v(\varepsilon)) (\varphi_0 + \varepsilon \chi(\varepsilon)) \\
 &=: Q[\chi(\varepsilon), \lambda_1(\varepsilon), \tau_1(\varepsilon), v(\varepsilon); \varepsilon],
 \end{aligned}$$

$$(8c) \quad \chi(\varepsilon), v(\varepsilon) \in N(L_0)^\perp, \quad B[\chi(\varepsilon)] = B[v(\varepsilon)] = 0$$

Zu (8) wird wie üblich eine äquivalente nichtlineare RWA definiert. Sie hat hier die Dimension $N = 2n+4$ und lautet

$$\begin{aligned}
 L_0 v(\varepsilon) &= P[v(\varepsilon), \lambda_1(\varepsilon), \tau_1(\varepsilon); \varepsilon], & B[v(\varepsilon)] &= 0 \\
 L_0 \chi(\varepsilon) &= Q[\chi(\varepsilon), \lambda_1(\varepsilon), \tau_1(\varepsilon), v(\varepsilon); \varepsilon], & B[\chi(\varepsilon)] &= 0 \\
 \lambda_1(\varepsilon)' &= 0 \\
 (9) \quad \tau_1(\varepsilon)' &= 0 \\
 \mu_1' - \varphi_0^T v(\varepsilon) &= 0, & \mu_1(a) = \mu_1(b) &= 0 \\
 \mu_2' - \varphi_0^T \chi(\varepsilon) &= 0, & \mu_2(a) = \mu_2(b) &= 0
 \end{aligned}$$

Man erkennt leicht durch Betrachtung von (8), daß sich (9) für $\varepsilon \rightarrow 0$ reduziert auf

$$\begin{aligned}
 L_0 v(0) - \tau_1(0) f_c^0 - \lambda_1(0) f_{U\lambda}^0 \varphi_0 &= \frac{1}{2} f_{UU}^0 \varphi_0 \varphi_0, & B[v(0)] &= 0 \\
 L_0 \chi(0) - \lambda_1(0) f_{U\lambda}^0 \varphi_0 &= f_{UU}^0 \varphi_0 \varphi_0, & B[\chi(0)] &= 0 \\
 (10) \quad \lambda_1(0)' &= \tau_1(0)' = 0 \\
 \mu_1' - \varphi_0^T v(0) &= 0, & \mu_1(a) = \mu_1(b) &= 0 \\
 \mu_2' - \varphi_0^T \chi(0) &= 0, & \mu_2(a) = \mu_2(b) &= 0.
 \end{aligned}$$

Hilfssatz 4.1

Vor.: Es gelte (2), (3), (4) und (5).

Beh.: Der lineare Differentialoperator $\mathcal{L}$ der Dimension $N = 2n+4$, der durch die linke Seite und die Randbedingungen von (10) definiert ist, ist invertierbar.

Beweis: Die homogene Gleichung

$$\begin{aligned} L_0 \chi(0) - \lambda_1(0) f_{u1}^0 \varphi_0 &= 0, & \mathcal{B}[\chi(0)] &= 0 \\ (11) \quad \lambda_1(0)' &= 0 \\ \mu_2' - \varphi_0^T \chi(0) &= 0, & \mu_2(a) &= \mu_2(b) = 0 \end{aligned}$$

ist unabhängig vom Rest von (10). Wir untersuchen sie auf nichttriviale Lösungen. Sei also $(v^0, \chi^0, \lambda_1^0, \tau_1^0, \mu_1^0, \mu_2^0)$ Lösung der homogenen Gleichung (10). Dann erfüllen χ^0, λ_1^0 und μ_2^0 natürlich (11). Hilfssatz 3.1 liefert wegen (5): $\langle \varphi_0, f_{u1}^0 \varphi_0 \rangle = a_0 \neq 0$, angewandt auf (11) das Ergebnis

$$\chi^0 \equiv 0, \lambda_1^0 \equiv \mu_2^0 \equiv 0.$$

Einsetzen in (10) ergibt folgenden Rest:

$$\begin{aligned} L_0 v^0 - \tau_1^0 f_\tau^0 &= 0, & \mathcal{B}[v^0] &= 0 \\ (12) \quad \tau_1^0' &= 0 \\ \mu_1^0 - \varphi_0^T v^0 &= 0 & \mu_1^0(a) &= \mu_1^0(b) = 0. \end{aligned}$$

Wieder folgt wegen (5), diesmal $\langle \varphi_0, f_\tau^0 \rangle = b_0 \neq 0$, das Resultat

$$v^0 \equiv 0, \tau_1^0 \equiv \mu_1^0 \equiv 0.$$

Damit ist $\mathcal{L}$ injektiv. Die Surjektivität ist klar.

q.e.d.

Satz 4.1

Vor.: Es mögen alle in Abschnitt 4.1 gemachten Voraussetzungen gelten, insbesondere (5).

Beh.: Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß die RWA (9) für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ eine stetige Kurve von isolierten Lösungen $(v(\varepsilon), \mathcal{K}(\varepsilon), \lambda_1(\varepsilon), \tau_1(\varepsilon), \mu_1(\varepsilon), \mu_2(\varepsilon))$ hat, aus denen man mittels (7) eine Familie von nichtisolierten Lösungen von (2) konstruieren kann, die durch $(\lambda_0, 0, 0, \varphi_0)$ geht.

Beweis: Anwendung von Hilfssatz 4.1 und des Theorems über implizite Funktionen.

q.e.d.

Wir haben sowohl die Existenz eines stetigen Zweiges von nichtisolierten Lösungen gezeigt, als auch mit (9) eine RWA angegeben, die numerisch leicht mit den bekannten Verfahren zu behandeln ist.

4.3 LÖSUNGSZWEIGE DURCH NICHTISOLIERTE LÖSUNGEN

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Umständen eine nichtisolierte Lösung von (1) Element eines Lösungszweiges mit festem τ ist. Man ist ja im allgemeinen am Lösungsverhalten für festgehaltenes τ interessiert. Sei also $\tau = \tau_0$ fest und

$$g(\lambda, u) := f(\lambda, \tau_0, u).$$

Wir behandeln die RWA

$$(13) \quad Lu = g(\lambda, u), \quad B[u] = 0.$$

Sei $u = u_0$ nichtisolierte Lösung von (13) für $\lambda = \mu_0$. Es gelte insbesondere

$$(14) \quad \begin{aligned} \dim N(L_1) &= 1, \quad N(L_1) = \text{span}\{\bar{\varphi}\}, \\ \dim N(L_1^*) &= 1, \quad N(L_1^*) = \text{span}\{\bar{\varphi}^*\}, \end{aligned}$$

wobei L_1 der lineare Differentialoperator mit Differentialausdruck $L = g_u(\mu_0, u_0)$ und Definitionsbereich $D(L_1) = D(L)$ ist. Um Lösungen μ, u mit kleinem $|\mu - \mu_0|$ und $\|u - u_0\|$ zu finden, machen wir genau wie in Abschnitt 2.8 den Störungsansatz (vgl. KEENER & KELLER [1])

$$(15) \quad \begin{aligned} u(\delta) &= u_0 + \delta \bar{\varphi} + \delta^2 w_1(\delta), \quad w_1(\delta) \in N(L_1)^\perp \\ \mu(\delta) &= \mu_0 + \delta^2 \mu_1(\delta). \end{aligned}$$

Einsetzen in (13) liefert

$$(16) \quad \begin{aligned} L_1 w_1(\delta) &= \frac{1}{\delta^2} g(\mu(\delta), u(\delta)) - g(\mu_0, u_0) - g_u(\mu_0, u_0) (\delta \bar{\varphi} + \delta^2 w_1(\delta)) \\ &= \mu_1(\delta) \int_0^1 g_\lambda(\mu_0 + \delta^2 s \mu_1(\delta), u(\delta)) ds + \\ &\quad \int_0^1 g_{uu}(\mu_0, u_0 + \delta s t (\bar{\varphi} + \delta w_1(\delta))) s dt ds (\bar{\varphi} + \delta w_1(\delta)) (\bar{\varphi} + \delta w_1(\delta)) \\ &=: \bar{P}[w_1(\delta), \mu_1(\delta); \delta], \quad B[w_1(\delta)] = 0, \quad \langle w_1(\delta), \bar{\varphi} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Das hier definierte $\bar{P}$ ist identisch mit P aus (2.53).
Eine zu (16) äquivalente RWA der Dimension $N = n+2$
wird definiert durch

$$\begin{aligned} L_1 u_1(\delta) - \bar{P}[u_1(\delta), \mu_1(\delta); \delta] &= 0, \quad B[u_1(\delta)] = 0 \\ (17) \quad \mu_1(\delta)' &= 0 \\ x' - \bar{\varphi}^T u_1(\delta) &= 0, \quad x(a) = x(b) = 0. \end{aligned}$$

Satz 4.2

Vor.: (i) Für die RWA (13) gelte (14). L und B sollen weiterhin die Voraussetzungen aus Abschnitt 4.1 erfüllen.

(ii) Es gelte $\langle \bar{\varphi}, g_\lambda(\mu_0, u_0) \rangle = c_0 \neq 0$

Beh.: Es existiert ein $\delta_0 = \delta_0(g) > 0$, so daß die RWA (17) eine auf $(-\delta_0, +\delta_0)$ definierte stetige Kurve von isolierten Lösungen $(u_1(\delta), \mu_1(\delta), x(\delta))$ besitzt. Daraus kann man mittels (15) einen stetigen Zweig von Lösungen von (2) mit $\tau = \tau_0$ konstruieren, der durch die nichtisolierte Lösung (u_0, μ_0) geht.

Beweis: Die RWA (17) reduziert sich für $\delta = 0$ auf eine lineare RWA, die in ihrer Form genau (2.54) entspricht. Wegen $c_0 \neq 0$ folgt aus Hilfssatz 3.1, daß diese eindeutig lösbar ist, woraus mit Hilfe des Theorems über implizite Funktionen die Behauptung folgt.

q.e.d.

Wir können nun Lösungen von (2) für kleine $|\varepsilon|$ und $|\delta|$ in der Form

$$\begin{aligned} u(\varepsilon, \delta) &= (\varepsilon + \delta) \varphi_0 + \varepsilon^2 v(\varepsilon) + \varepsilon \delta \chi(\varepsilon) + \delta^2 w_1(\varepsilon, \delta) \\ \lambda(\varepsilon, \delta) &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\varepsilon) + \delta^2 \mu_1(\varepsilon, \delta) \\ \tau(\varepsilon) &= \varepsilon^2 \tau_1(\varepsilon) \\ |\varepsilon| < \varepsilon_0, |\delta| < \delta_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

darstellen und mit Hilfe der RUA'n (9) und (17) numerisch berechnen. KEENER & KELLER [1] haben gezeigt, daß der Zusammenhang $\delta_0(\epsilon) = O(\epsilon)$ für $\epsilon \rightarrow 0$ besteht.

Bei der Anwendung numerischer Verfahren auf (9) und (17) hat man die Wahl zwischen den bekannten Standardverfahren. Man muß jedoch beachten, daß man zur Lösung von (17) als Daten w_0 , $\bar{\varphi}$ und μ_0 benötigt, die mit Hilfe von (9) numerisch berechnet werden müssen. Wir haben die Trapezregel für unsere Berechnungen eingesetzt und zur Genauigkeitssteigerung auf die Schrittweite $h = 0$ extrapoliert. Dabei muß das größte Gitter zur Diskretisierung von (9), auf dem man durch Extrapolation die genauesten Ergebnisse erhält, dem feinsten Gitter zur Diskretisierung von (17) entsprechen, damit kein Genauigkeitsverlust auftritt. Die Auswirkung von etwaigen trotzdem vorhandenen kleinen Störungen in diesen Daten w_0 , $\bar{\varphi}$, μ_0 ist harmlos und kann ähnlich wie in Abschnitt 2.7 abgeschätzt werden.

Es stellt sich allerdings die Frage, ob die hier vorgestellte, zugegebenermaßen recht aufwendige Vorgehensweise bei kleinen Störungen in f wirklich notwendig ist, oder ob nicht die in Kapitel 2 benutzten Methoden ausreichen, um die Lösungen quantitativ gut zu erfassen, einmal abgesehen von der unmittelbaren Umgebung des "Verzweigungspunktes", in dem eben hier keine Verzweigung auftritt. Unser Beispiel in Kapitel 6 wird diese Frage untersuchen.

5 NUMERISCHE BEHANDLUNG SEKUNDÄRER VERZWEIGUNG

5.1 BEMERKUNGEN ZUR PROBLEMATIK

Ist eine Lösungskurve $(\lambda(t), u(t))$, $t \in I$, I reelles Intervall, der Gleichung $F(\lambda, u) = 0$ (F sei wie in Abschnitt 1.2 definiert mit Ausnahme der Forderung $F(\lambda, 0) = 0$) explizit bekannt, so führt die Transformation

$$(1) \quad \tilde{F}(t, x) = F(\lambda(t), u(t) + x)$$

auf ein übliches Verzweigungsproblem mit trivialer Lösung: $\tilde{F}(t, 0) = 0$ für alle $t \in I$. Für ein konkretes Verzweigungsproblem bei RWA'n gewöhnlicher Differentialgleichungen läßt sich dann etwa mit Methoden aus 2.6 der Verzweigungspunkt $(t^*, 0)$ und die Eigenfunktion φ bestimmen, sowie die abzweigende Lösung als

$$\begin{aligned} x(\varepsilon) &= \varepsilon \varphi + \varepsilon^2 v(\varepsilon), \quad v(\varepsilon) \perp \varphi \\ t(\varepsilon) &= t^* + \varepsilon \gamma(\varepsilon) \end{aligned}$$

ansetzen - wir betrachten hier und im folgenden nur den Fall der Verzweigung bei "einfachen" Eigenwerten. Nach 2.2 erhält man nun $v(\varepsilon)$ und $\gamma(\varepsilon)$ als Lösung einer RWA. Die die primäre Lösungskurve $(\lambda(t), u(t))$ in $(\lambda(t^*), u(t^*))$ schneidende sekundäre Lösungskurve hat dann die Gestalt

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{u}(\varepsilon) &= u(t^* + \varepsilon \gamma(\varepsilon)) + \varepsilon \varphi + \varepsilon^2 v(\varepsilon), \\ \bar{\lambda}(\varepsilon) &= \lambda(t^* + \varepsilon \gamma(\varepsilon)), \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Das Hauptproblem ist aber, daß die primäre Kurve $(\lambda(t), u(t))$ bei praktischen Anwendungen nicht explizit bekannt ist, sondern nur für gewisse $t_i \in I$ numerisch berechnet werden kann. In der Nähe des Verzweigungspunktes ist das Problem der numerischen Berechnung der primären Kurve zudem sehr

schlecht konditioniert, da die Fréchet - Ableitung von F nach u im Verzweigungspunkt singular wird. Man kann also $(\lambda(t), u(t))$ in der Nähe des interessierenden Punktes nicht sehr genau berechnen. Das gleiche gilt für die Bestimmung des Verzweigungspunktes selbst und der zugehörigen Nullvektoren. RHEINBOLDT [1] approximiert bei endlichdimensionalen Verzweigungsproblemen die primäre Lösungskurve durch eine quadratische Parabel und kommt auch ohne genaue Kenntnis des Verzweigungspunktes aus. KELLER [3] deutet ein ähnliches Vorgehen an. Man kann so sicherlich gut von einem Zweig auf den anderen überwechseln, jedoch nur schwer zu genauen Resultaten in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes kommen.

Wir schlagen deshalb einen anderen Weg ein, der von der prinzipiellen Gleichberechtigung der beiden sich schneidenden Lösungskurven Gebrauch macht.

Zur Bestimmung beider Lösungskurven in der Nähe des Verzweigungspunktes werden wir eine Konkretisierung des in Abschnitt 1.3 vorgeschlagenen Vorgehens benutzen. Zuvor jedoch müssen der Verzweigungspunkt und die zugehörigen Nullvektoren mit guter Genauigkeit berechnet werden.

5.2 BERECHNUNG DES VERZWEIGUNGSPUNKTES UND DER NULLVEKTOREN

5.2.1 ENDLICHDIMENSIONALER FALL

Wir wollen hier eine Charakterisierung des Verzweigungspunktes und der beiden zugehörigen Nullvektoren geben, die ein konstruktives Verfahren zur numerischen Bestimmung aller dieser Größen ermöglicht. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den endlichdimensionalen Fall. Wir betrachten die Gleichung

$$(3) \quad F(z) = F(u, \lambda) = 0$$

mit

$$(4) \quad F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Für $z^* = (u^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sei (3) erfüllt. Es gelte ferner (vgl. Abschnitt 1.3)

$$\begin{aligned} \dim N(F'(z^*)) &= 2, \quad N(F'(z^*)) = \text{span}\{p, q\}, \\ F'(z^*) &= (F_u(z^*), F_\lambda(z^*)), \quad p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ q &= (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \\ \text{codim } R(F'(z^*)) &= 1, \end{aligned}$$

(5a) $\gamma \in \mathbb{R}^n$ sei so gewählt, daß

$$\begin{aligned} R(F'(z^*)) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \gamma, x \rangle = 0\}, \quad \langle x, y \rangle := x^T y, \\ a_1 &:= \langle \gamma, F''(z^*)pp \rangle, \quad a_2 := \langle \gamma, F''(z^*)pq \rangle, \\ a_3 &:= \langle \gamma, F''(z^*)qq \rangle, \quad a_1 a_3 - a_2^2 < 0. \end{aligned}$$

Dann ist $z^* = (u^*, \lambda^*)$ Verzweigungspunkt von (3), d.h. die Nullstellenmenge von (3) in der Nähe von z^* besteht genau aus zwei stetigen Kurven, die sich nur in z^* schneiden.

Es gelte ferner:

(5b) Wenigstens eine der beiden sich in (u^*, λ^*) schneidenden Kurven gestatte eine Parametrisierung nach λ , d.h. sei eine glatte Kurve in Abhängigkeit von λ .

Damit können wir p und q in der speziellen Form $p = (p_1, 0)$ mit $\langle p_1, p_1 \rangle = 1$, $q = (q_1, 1)$ mit $\langle p_1, q_1 \rangle = 0$ ansetzen. Dadurch sind p und q bis auf Vorzeichen eindeutig festgelegt.

Es ist nun klar, daß die gesuchten Größen folgendes, sie definierende Gleichungssystem erfüllen müssen:

$$\begin{aligned}
 & F(u, \lambda) = 0 \\
 & F_u(u, \lambda) p_1 = 0 \\
 (6) \quad & F_u(u, \lambda) q_1 + F_\lambda(u, \lambda) = 0 \\
 & \langle p_1, p_1 \rangle - 1 = 0 \\
 & \langle p_1, q_1 \rangle = 0
 \end{aligned}$$

(6) wird zusammengefaßt geschrieben als

$$(7) \quad G(y) = 0$$

mit $G: \mathbb{R}^{3n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3n+2}$, $y = (u, \lambda, p_1, q_1)$. G definiert ein nichtlineares, überbestimmtes Gleichungssystem. Wesentlich für alles folgende ist

Hilfssatz 5.1

Vor.: Es gelte (5) mit $p = p^*$, $q = q^*$, $p^* = (p_1^*, 0)$, $\langle p_1^*, p_1^* \rangle = 1$, $q^* = (q_1^*, 1)$, $\langle q_1^*, p_1^* \rangle = 0$.

Beh.: An der Stelle $y^* = (u^*, \lambda^*, p_1^*, q_1^*)$ hat die Funktionalmatrix G' den Rang $3n+1$.

Beweis: Wir betrachten die Gleichung $G'(y^*) \Delta y = 0$ mit $\Delta y = (\Delta u, \Delta \lambda, \Delta p_1, \Delta q_1) \in \mathbb{R}^{3n+1}$. Diese hat die Gestalt ($F_u^* := F_u(z^*)$ etc.)

$$\begin{aligned}
 & F_u^* \Delta u + F_\lambda^* \Delta \lambda = 0 \\
 & F_{uu}^* p_1^* \Delta u + F_{u\lambda}^* p_1^* \Delta \lambda + F_u^* \Delta p_1 = 0 \\
 (8) \quad & F_{uu}^* q_1^* \Delta u + F_{u\lambda}^* q_1^* \Delta \lambda + F_u^* \Delta q_1 + F_{u\lambda}^* \Delta u + F_{\lambda\lambda}^* \Delta \lambda = 0 \\
 & 2 \langle p_1^*, \Delta p_1 \rangle = 0 \\
 & \langle q_1^*, \Delta p_1 \rangle + \langle \Delta q_1, p_1^* \rangle = 0
 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung von (8) folgt nun

$$(9) \quad \Delta u = c_1 p_1^* + c_2 q_1^*, \Delta \lambda = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen von (9) in die zweite Gleichung von (8) liefert

$$(10) \quad F_u^* \Delta p_1 = -c_1 F_{uu}^* p_1^* p_1^* - c_2 (F_{uu}^* p_1^* q_1^* + F_{u\lambda}^* p_1^*).$$

Ebenso erhält man aus der dritten Gleichung von (8)

$$(11) \quad F_u^* \Delta q_1 = -c_1 (F_{uu}^* q_1^* p_1^* + F_{u\lambda}^* p_1^*) - c_2 (F_{uu}^* q_1^* q_1^* + 2F_{u\lambda}^* q_1^* + F_{\lambda\lambda}^*).$$

a_1, a_2, a_3 aus (5) lauten in unserem Fall

$$a_1 = \langle \psi, F_{uu}^* p_1^* p_1^* \rangle, \quad a_2 = \langle \psi, F_{uu}^* p_1^* q_1^* + F_{u\lambda}^* p_1^* \rangle$$

$$a_3 = \langle \psi, F_{uu}^* q_1^* q_1^* + 2F_{u\lambda}^* q_1^* + F_{\lambda\lambda}^* \rangle.$$

Wegen (5b) gilt $R(F_u^*) = R(F^*)$. Damit ist die Lösbarkeit von (10) und (11) äquivalent dazu, daß c_1 und c_2 das homogene lineare Gleichungssystem

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 = 0$$

$$a_2 c_1 + a_3 c_2 = 0$$

erfüllen. Aus der Voraussetzung $a_1 a_3 - a_2^2 < 0$ aus (5) folgt $c_1 = c_2 = 0$, folglich $\Delta u \equiv 0, \Delta \lambda = 0$ und

$$F_u^* \Delta p_1 = 0, \quad F_u^* \Delta q_1 = 0.$$

Damit ist

$$\Delta p_1 = d p_1^*, \quad \Delta q_1 = e p_1^*, \quad d, e \in \mathbb{R}.$$

Die vierte Zeile von (8) liefert

$$0 = 2 \langle p_1^*, \Delta p_1 \rangle = 2d \langle p_1^*, p_1^* \rangle = 2d,$$

damit $d = 0$, $\Delta p_1 = 0$. Aus der fünften Zeile von (8) schließlich folgt

$$0 = \langle q_1^*, \Delta p_1 \rangle + \langle \Delta q_1, p_1^* \rangle = d \langle q_1^*, p_1^* \rangle + e \langle p_1^*, p_1^* \rangle = e.$$

Wir haben gezeigt: $\Delta y = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

q.e.d.

Zur Auflösung des überbestimmten Gleichungssystems (6) definieren wir das Funktional $g: \mathbb{R}^{3n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(12) \quad g(y) = \frac{1}{2} G(y)^T G(y)$$

und betrachten die unrestringierte Minimierungsaufgabe:

$$(13) \quad \text{Bestimme } y^* \in \mathbb{R}^{3n+1} \text{ mit } g(y^*) = \min_{y \in \mathbb{R}^{3n+1}} g(y).$$

Im Punkt $y^* = (u^*, \lambda^*, p_1^*, q_1^*)$ hat (12) seinen Minimalwert Null. Wir suchen also globale Minimalpunkte von (12). Eine wichtige Eigenschaft von (12) beleuchtet

Satz 5.1

Vor.: wie in Hilfssatz 5.1.

Beh.: Es existiert eine Umgebung U von $y^* \in \mathbb{R}^{3n+1}$, so daß g auf U strikt konvex ist.

Beweis: Wir bilden g' und g'' :

$$g'(y) = G(y)^T G'(y), \quad g''(y) = G'(y)^T G'(y) + G(y)^T G''(y).$$

Wegen $G(y^*) = 0$ ist $g''(y^*) = G'(y^*)^T G'(y^*)$. Nach Hilfssatz 5.1 hat $G'(y^*)$ vollen Rang. Damit ist die symmetrische Matrix $g''(y^*)$ positiv definit. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies in einer ganzen Umgebung U von y^* in $\mathbb{R}^{3n+1}$. Folglich ist g auf U strikt konvex, vgl. ORTEGA & RHEINBOLODT [1].

q.e.d.

Bemerkungen

1) Zur Minimierung von g auf U können Standardverfahren

der Optimierungstheorie herangezogen werden, die unter dem Oberbegriff "Abstiegsverfahren" zusammengefaßt werden. Als Konvergenzvoraussetzung für solche Verfahren ist die Konvexität des Funktionals g wesentlich. Einzelheiten findet man bei ORTEGA & RHEINBOLDT [1].

- 2) Da man die Konvexität von g nur lokal erwarten darf, benötigt man vernünftige Startwerte für die Iteration des Abstiegsverfahrens. Diese lassen sich durch RHEINBOLDT's [1] Vorgehensweise beschaffen. Mit dem dort geschilderten Verfahren erhält man Näherungen $\bar{\lambda}$, $\bar{u}$, $\bar{p}_1$ für λ^* , u^* und p_1^* sowie $\bar{r}$ als Näherung für $u_{\lambda}(\lambda^*) \in \mathbb{R}^n$, $\langle \bar{p}_1, \bar{p}_1 \rangle = 1$. Setzt man

$$\bar{q}_1 = \bar{r} - \langle \bar{r}, \bar{p}_1 \rangle \bar{p}_1,$$

so kann man $\bar{y} = (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{p}_1, \bar{q}_1)$ als gute Startnäherung für y^* ansehen.

Um einen ersten Eindruck von der Qualität unseres Verfahrens zu geben, betrachten wir folgendes

Beispiel: (CRANDALL & RABINOWITZ [1])

$$(14) \quad F(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} x + \lambda(x^3 - x + f(x, y)y) \\ 10y - \lambda(y + g(x, y)y) \end{pmatrix}$$

Dabei sind $f, g \in C^2$ mit $g(x, 0) = 2x^2$, $f(0, 0) = 0$.

Von der trivialen Lösung $x = y = 0$, die für alle λ existiert, zweigt in $((0, 0), 1)$ eine Kurve nichttrivialer Lösungen der Form

$$u_{\pm}(\lambda) = \begin{pmatrix} x_{\pm}(\lambda) = \pm \sqrt{(\lambda-1)/\lambda} \\ y(\lambda) = 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \geq 1,$$

ab. Längs des Zweiges $(u_+(\lambda), \lambda)$ ist

$$\alpha(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\lambda} u_+(\lambda) \\ \frac{d}{d\lambda} \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \lambda^{-2} \sqrt{\lambda/(\lambda-1)} \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nullvektor von $F'(u_+(\lambda), 1)$. Für $\lambda^* = 4$ ist auch

$$\beta = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \dots \\ 48 + 32f(\sqrt{3}/2, 0) \end{pmatrix}$$

zusätzlich Nullvektor von $F'(u_+(\lambda^*), \lambda^*)$. Wegen $F''(u_+(\lambda^*), \lambda^*) \propto (\lambda^*)/\beta \neq 0$ (vgl. CRANDALL & RABINOWITZ [1]) ist $(u_+(\lambda^*), \lambda^*) = (\sqrt{3}/2, 0), 4$ Verzweigungspunkt.

Wir wählen speziell $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x^2 + y$. Für diesen Fall ergeben sich leicht

$$(15) \quad q^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{16\sqrt{3}} \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad p^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Man setzt $p^* = \frac{1}{\sqrt{3}} (\beta - 48 \propto (\lambda^*)) = \frac{1}{\sqrt{3}} (0, 0, \sqrt{3})^T = (0, 0, 1)^T$).

Das Gleichungssystem $G(y) = 0$ berechnet sich zu

$$(16) \quad \begin{aligned} y_1 + y_3(y_1^3 - y_1 + y_1 y_2^2) &= 0 \\ 10y_2 - y_3(y_2 + 2y_1^2 y_2 + y_2^2) &= 0 \\ [1 + y_3(3y_1^2 - 1 + y_2^2)] y_4 + 2y_3 y_1 y_2 y_5 &= 0 \\ -4y_3 y_1 y_2 y_4 + [10 - y_3(1 + 2y_1^2 + 2y_2^2)] y_5 &= 0 \\ [1 + y_3(3y_1^2 - 1 + y_2^2)] y_6 + 2y_3 y_1 y_2 y_7 + y_1^3 - y_1 + y_1 y_2 &= 0 \\ -4y_3 y_1 y_2 y_6 + [10 - y_3(1 + 2y_1^2 + 2y_2^2)] y_7 - y_2 - 2y_1^2 y_2 + y_2^2 &= 0 \\ y_4^2 + y_5^2 - 1 &= 0 \\ y_6 y_4 + y_7 y_5 &= 0 \end{aligned}$$

Zur Minimierung des Funktionals $g(y)$ haben wir eine ableitungsfreie Variante des Levenberg - Marquardt - Algorithmus nach BROWN & DENNIS [1] verwandt. In nachstehender Tabelle sind der exakte Vektor y^* und die mit

y_{LM} bezeichnete Näherung aufgeführt. Das benutzte FORTRAN - Unterprogramm stammt aus der IMSL - Programmbibliothek.

y^*	y_{LM}
0.8660254035...	0.86602540
0	0.52476316 _{10⁻¹¹}
4	4
0	-0.73964168 _{10⁻¹¹}
1	1
0.3608439183... _{10⁻¹}	0.36084392
0	-0.50100290 _{10⁻¹²}

Anfangswerte waren (1, 0.8, 3.2, -0.4, 0.75, 0.01, 0.5).

Anzahl der Iterationsschritte : 20.

Maschinengenauigkeit: 8 Dezimalstellen (HB 66/80)

Auch für viel schlechtere Anfangswerte, nämlich (10, -5, 10, -5, 10, -5, 10), erzielten wir in 27 Iterationsschritten dieselbe Genauigkeit.

5.2.2 UNENDLICHODIMENSIONALER FALL, RANDWERTAUFGABEN

Die in Abschnitt 5.2.1 beschriebene Vorgehensweise läßt sich leicht auf den Fall

$$(17) \quad F: B_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \bar{B}_2$$

übertragen. Das entstehende nichtlineare Gleichungssystem $G(y) = 0$, $G: \mathbb{R} \times B_1 \times B_1 \times B_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times B_2 \times B_2 \times B_2$

hat formal dieselbe Gestalt wie (6). Genau wie in Hilfsatz 5.1 kann man zeigen, daß $G'(y^*)$ injektiv ist. Ebenfalls läßt sich g als Funktional auf $\mathbb{R} \times B_1 \times B_1 \times B_1$ definieren. Zur numerischen Rechnung muß dieses Funktional geeignet diskretisiert werden. Wir stellen hierüber keine Überlegungen an, sondern untersuchen genauer den Fall der RWA

$$(18) \quad F(u, \lambda) = Lu - f(\lambda, u) = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad B[u] = 0,$$

wobei L, f, B den üblichen Voraussetzungen (2.2), außer $f(\lambda, 0) = 0$, genügen sollen. Sei weiter $(u^*, \lambda^*) \in C_n^1[a, b] \times \mathbb{R}$ so gewählt, daß $F(u^*, \lambda^*) = 0$ und der lineare Operator

$$(19a) \quad F'(u^*, \lambda^*) = (L - f_u(\lambda^*, u^*), -f_\lambda(\lambda^*, u^*))$$

mit Definitionsbereich

$$(19b) \quad D = \{(y, \mu) \in C_n^1[a, b] \times \mathbb{R} \mid B[y] = 0\}$$

einen zweidimensionalen Nullraum hat:

$$(20) \quad \dim N(F'(u^*, \lambda^*)) = 2, \quad N(F'(u^*, \lambda^*)) = \text{span}\{p, q\}$$

mit $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, $p_1, q_1 \in C_n^1[a, b]$, $p_2, q_2 \in \mathbb{R}$. $\bar{L}^*$ sei der zu $\{\bar{L}, D(\bar{L})\}$ ($\bar{L} = L - f_u(\lambda^*, u^*)$, $D(\bar{L}) = D(L)$) adjungierte lineare Differentialoperator. Es gilt

$$(21) \quad \dim N(\bar{L}^*) = 1, \quad N(\bar{L}^*) = \text{span}\{\psi\}.$$

Setze

$$\begin{aligned} a_1 &:= \langle \psi, f''(\lambda^*, u^*)_{pp} \rangle, \quad a_2 := \langle \psi, f''(\lambda^*, u^*)_{pq} \rangle, \\ a_3 &:= \langle \psi, f''(\lambda^*, u^*)_{qq} \rangle. \end{aligned}$$

Damit gelte

$$(22) \quad a_1 a_3 - a_2^2 < 0.$$

Dann ist (u^*, λ^*) Verzweigungspunkt nach Satz 1.4.

Eine der beiden sich in (u^*, λ^*) schneidenden Lösungskurven gestatte wieder eine Parametrisierung nach λ .

Für p und q nehmen wir wieder die spezielle Form

$$p^* = (p_1^*, 0), \quad \langle p_1^*, p_1^* \rangle = 1, \quad q^* = (q_1^*, 1), \quad \langle p_1^*, q_1^* \rangle = 0.$$

Zur Bestimmung von λ^* , u^* , p_1^* und q_1^* definieren wir folgender RWA der Dimension $N = 3n+3$:

$$\begin{aligned} (23) \quad & Lu - f(\lambda, u) = 0, & B[u] &= 0 \\ & [L - f_u(\lambda, u)] p_1 = 0, & B[p_1] &= 0 \\ & [L - f_u(\lambda, u)] q_1 - f_\lambda(\lambda, u) = 0, & B[q_1] &= 0 \\ & \lambda' = 0 \\ & \mu_1^T - p_1^T p_1 = 0, & \mu_1(a) = 0, \mu_1(b) = 1 \\ & \mu_2^T - p_1^T q_1 = 0, & \mu_2(a) = 0, \mu_2(b) = 0 \end{aligned}$$

Sie besitzt $3n+4 = N+1$ linear unabhängige Randbedingungen, ist also ebenfalls "überbestimmt".

Hilfssatz 5.2

Vor.: Seien alle an L , f , B , λ^* , u^* , p^* und q^* gemachten Voraussetzungen erfüllt. Wir schreiben (23) zusammengefaßt als

$$(24) \quad y' = h(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad \bar{B}[y] = \eta.$$

Beh.: Die lineare homogene RWA

$$(25) \quad w' - h_y(t, y^*(t))w = 0, \quad \bar{B}[u] = 0$$

(dabei ist $y^* = (u^*, \lambda^*, p_1^*, q_1^*, \mu_1^*, \mu_2^*)$,

$$\mu_1^*(t) = \int_a^t p_1^*(s)^T p_1^*(s) ds, \quad \mu_2^*(t) = \int_a^t p_1^*(s) q_1^*(s) ds)$$

besitzt nur die triviale Lösung.

Beweis: Der Beweis besitzt große Ähnlichkeit mit dem von Hilfssatz 5.1 und soll deshalb hier nicht vorgeführt werden. Die hier betrachteten Differentialoperatoren sind ja Fredholm - Operatoren von endlichem Index und verhalten sich deshalb fast genau wie Operatoren in endlichdimensionalen Räumen.

Zur numerischen Lösung der RWA (23) könnte man diese wieder mittels Differenzenverfahren diskretisieren und das so entstandene überbestimmte nichtlineare Gleichungssystem wie in Abschnitt 5.2.1 behandeln. Dies würde jedoch zu einer Minimierungsaufgabe mit sehr vielen Unbekannten führen, d.h. großen Aufwand erfordern. Überdies bliebe die Frage nach der Konvergenz vorerst offen.

Wir verwenden deshalb hier das Shooting - Verfahren (vgl. Abschnitt 2.3.3) in geeigneter Form. Es werden Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$(26) \quad G(s) = 0$$

gesucht, wobei

$$(27) \quad G(s) = \bar{B}_a s + \bar{B}_b y(b; s) - \gamma, \quad G: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1},$$

und $y(t; s)$ Lösung der AWA

$$(28) \quad \frac{d}{dt} y(t; s) = h(t, y(t; s)), \quad y(a; s) = s$$

ist. Es gilt

$$G'(s) = \bar{B}_a + \bar{B}_b Z(b;s)$$

mit

$$Z(b;s) = \left[\frac{\partial y(b;s)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial y(b;s)}{\partial s_N} \right].$$

$Z(t;s)$ ist Lösung der AWA

$$(29) \quad \frac{d}{dt} Z(t;s) = h_y(t, y(t;s)) Z(t;s), \quad Z(a;s) = I.$$

Ist $s^* = y^*(a)$, d.h. s^* Lösung von (26), so ist $Z(t;s^*)$ Lösung von

$$\frac{d}{dt} Z(t;s^*) = h_y(t, y^*(t)) Z(t;s^*), \quad Z(a;s^*) = I.$$

Es gilt

Hilfssatz 5.3

Vor.: Sei L definiert durch

$$\begin{aligned} Ly &= y' - A(t)y, \quad D(L) = \{y \in C_n^1[a,b] \mid B[y] = 0\}, \\ B[y] &= B_a y(a) + B_b y(b), \quad B_a, B_b \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad \text{Rang}[B_a \ B_b] = m, \\ A &\in C_{n \times n}[a,b]. \end{aligned}$$

Beh.: Die Nullräume von L und $S = B_a + B_b \phi(b)$ sind isomorph. Dabei ist $\phi \in C_{n \times n}^1[a,b]$ Lösung von $\phi' - A(t)\phi = 0$, $\phi(a) = I$.

Beweis: LANGFORD [1].

Zur Lösung von (26) definieren wir ein Funktional $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

$$(30) \quad g(s) = \frac{1}{2} G(s)^T G(s).$$

Gesucht ist nun $s^* \in \mathbb{R}^N$: $g(s^*) = \min_{s \in \mathbb{R}^N} g(s)$.

Satz 5.2

Vor.: Es seien die am Anfang von Abschnitt 5.5.5 gemachten Voraussetzungen an L , f , B , u^* , λ^* , p^* und q^* erfüllt, insbesondere (20), (22) und die spezielle Gestalt von p^* und q^* .

Beh.: Das Funktional g aus (30) ist strikt konvex auf einer Umgebung U von $y^* = (u^*, \lambda^*, p_1^*, q_1^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$.

Beweis: Nach Hilfssatz 5.3 hat der Nullraum von $G'(s^*) = \bar{B}_a + \bar{B}_b Z(b; s^*)$ die gleiche Dimension wie der Nullraum des durch

$$w' = h_y(t, y^*(t))w \quad \text{und} \quad \bar{B}$$

definierten linearen Differentialoperators. Diese ist nach Hilfssatz 5.2 Null. Also hat $G'(s^*)$ den vollen Rang N . Damit ist $g''(s^*) = G'(s^*)^T G'(s^*)$ positiv definit. Wie in Satz 5.1 folgt die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung:

Falls die bekannten Schwierigkeiten des Shooting - Verfahrens auftreten, muß man das Multiple - Shooting - Verfahren benutzen. Man löst dann das nichtlineare überbestimmte Gleichungssystem

$$(31) \quad \begin{aligned} \bar{G}_j(\bar{s}) &= y_j(t_{j+1}; s_j) - s_{j+1} = 0, \quad 0 \leq j \leq J-2, \\ \bar{G}_{J-1}(\bar{s}) &= \bar{B}_a s_0 + \bar{B}_b y(b; s_{J-1}) - \eta = 0, \end{aligned}$$

wobei $\bar{s} = (s_0^T, \dots, s_{J-1}^T)^T \in \mathbb{R}^{NJ}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_J = b$, $y_j(t; s_j)$ Lösung der AWA $\frac{d}{dt} y_j(t; s_j) = h(t, y_j(t; s_j))$, $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, $y_j(t_j; s_j) = s_j$.

Für das Funktional $\bar{g}: \mathbb{R}^{NJ} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(32) \quad \bar{g}(\bar{s}) = \frac{1}{2} \bar{G}(\bar{s})^T \bar{G}(\bar{s})$$

mit $\bar{G}(\bar{s}) = (\bar{G}_1(\bar{s}), \dots, \bar{G}_{J-1}(\bar{s}))^T$ gilt natürlich ebenfalls, daß es in einer Umgebung von $\bar{s}^* = (s_0^{*T}, \dots, s_{J-1}^{*T})^T$, $s_i^* = y^*(t_i)$, $i=0,1,\dots,J-1$, strikt konvex ist. Wenn man also J nicht zu groß wählt - N liegt ja normalerweise in der Größenordnung $10 - 20$ - kommt man auch hier zu einer mit vertretbarem Aufwand zu behandelnden Aufgabenstellung.

Schlußfolgerung

In Abschnitt 5.2 haben wir das Problem der Bestimmung eines Verzweigungspunktes und der zugehörigen Nullvektoren der Fréchet - Ableitung in diesem Punkt auf ein konvexes unrestringiertes Optimierungsproblem zurückgeführt. Dies wurde im wesentlichen dadurch möglich, daß wir in Kapitel 1 ein Ergebnis von CRANDALL & RABINOWITZ [1] dahingehend verallgemeinerten, daß nun dort beide Zweige gleichberechtigt behandelt werden. Die dort gemachte Voraussetzung (12b) ermöglicht erst das hier erzielte Ergebnis, das in der Hauptsache aus der Injektivität der Fréchet - Ableitung von (6) bzw. (26) im Verzweigungspunkt besteht. Die numerische Behandlung des Optimierungsproblems gehört zu den Standardaufgaben der numerischen Mathematik. Hierfür stehen viele leistungsfähige Algorithmen zur Verfügung. Bei dem resultierenden konvexen Optimierungsproblem handelt es sich überdies um ein gut konditioniertes Problem, d.h. eine Aufgabenstellung mit endlicher Kondition, im Gegensatz zu anderen Methoden zur Bestimmung von Verzweigungspunkten, bei denen dies nicht der Fall ist, vgl. RHEINBOLOT [1], KELLER [3]. In unserem Fall hängt die Minimallösung, die dem Verzweigungspunkt zugeordnet ist, Lipschitz - stetig von kleinen Störungen im Funktional g (bzw. $\bar{g}$) ab. Dies folgt aus der Regularität von g'' (bzw. $\bar{g}''$) in diesem Lösungspunkt.

5.3 BESTIMMUNG VON ZWEIGEN DURCH DEN VERZWEIGUNGSPUNKT BEI RANDWERTAUFGABEN

Wie in Abschnitt 5.1 schon bemerkt, soll nun, da die Möglichkeit gegeben ist, den Verzweigungspunkt und die zugehörigen Nullvektoren genau zu bestimmen, die Methode aus Abschnitt 1.3 in ähnlicher Form auf RWA'n angewandt werden.

Wir behandeln hier weiter die RWA aus 5.2.2 mit den dort gemachten Voraussetzungen, die besagen, daß (u^*, λ^*) Verzweigungspunkt ist. Ganz analog zum nichtlinearen Gleichungssystem (1.17) definieren wir die RWA

$$\begin{aligned}
 L^* v_1(\varepsilon) - f^* v_2(\varepsilon) + \frac{1}{2} \left\{ -f_{uu}^* [\alpha(\varepsilon) p_1 + \beta(\varepsilon) q_1 + \varepsilon^2 v_1(\varepsilon)]^2 \right. \\
 - 2f_{u\lambda}^* (\alpha(\varepsilon) p_1 + \beta(\varepsilon) q_1 + \varepsilon v_1(\varepsilon)) (\alpha(\varepsilon) p_2 + \beta(\varepsilon) q_2 + \varepsilon v_2(\varepsilon)) \\
 \left. - f_{\lambda\lambda}^* (\alpha(\varepsilon) p_2 + \beta(\varepsilon) q_2 + \varepsilon v_2(\varepsilon))^2 \right\} \\
 - \frac{1}{\varepsilon^2} R(\lambda^* + \varepsilon \{ \alpha(\varepsilon) p_2 + \beta(\varepsilon) q_2 \} + \varepsilon^2 v_2(\varepsilon)), \\
 (33a) \quad u^* + \varepsilon \{ \alpha(\varepsilon) p_1 + \beta(\varepsilon) q_1 \} + \varepsilon^2 v_1(\varepsilon)
 \end{aligned}$$

$$v_2(\varepsilon)' = 0$$

$$\alpha(\varepsilon)' = 0$$

$$\beta(\varepsilon)' = 0$$

$$\mu_1' - p_1^T v_1(\varepsilon) - p_2 v_2(\varepsilon) = 0$$

$$\mu_2' - q_1^T v_1(\varepsilon) - q_2 v_2(\varepsilon) = 0,$$

mit

$$\begin{aligned}
 (33b) \quad B[v_1(\varepsilon)] = 0, \quad \mu_1(a) = \mu_1(b) = \mu_2(a) = \mu_2(b) = 0, \\
 \alpha(\varepsilon; a)^2 + \beta(\varepsilon; a)^2 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

der Dimension $N = n+5$, die dem Ansatz

$$\begin{aligned}
 u(\varepsilon) &= u^* + \varepsilon \{ \alpha(\varepsilon) p_1 + \beta(\varepsilon) q_1 \} + \varepsilon^2 v_1(\varepsilon) \in C_n^1[a, b] \\
 \lambda(\varepsilon) &= \lambda^* + \varepsilon \{ \alpha(\varepsilon) p_2 + \beta(\varepsilon) q_2 \} + \varepsilon^2 v_2(\varepsilon) \in \mathbb{R} \\
 (34) \quad \langle v, p \rangle &= \langle v, q \rangle = 0, \quad v = (v_1, v_2), \quad p = (p_1, p_2), \\
 q &= (q_1, q_2), \quad \langle x, y \rangle := \langle x_1, y_1 \rangle + x_2 y_2 \quad \text{für} \\
 x, y &\in C_n^1[a, b] \times \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

entspricht. Es ist $L^* = L - f_u^*$, $f_u^* := f_u(\lambda^*, u^*)$ u.s.w., $v_2(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ und $\beta(\varepsilon)$ sind als konstante Variablen eingeführt. Die beiden letzten Differentialgleichungen von (33a) geben die Orthogonalitätsbedingungen an v wieder. Die Normierung $\alpha(\varepsilon)^2 + \beta(\varepsilon)^2 = 1$ haben wir in die Randbedingungen gesteckt. R enthält nur Glieder dritter und höherer Ordnung in $u - u^*$ und $\lambda - \lambda^*$.

Satz 5.3

Vor.: Für die RWA $Lu - f(\lambda, u) = 0$, $B[u] = 0$, gelte (2.2) (außer $f(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$), (19), (20) und (22).

Beh.: Es gibt zwei reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, so daß die nichtlineare RWA (33) für $|\varepsilon| < \varepsilon_i$, $i=1,2$ stetige Kurven $(v_1^i(\varepsilon), v_2^i(\varepsilon), \alpha^i(\varepsilon), \beta^i(\varepsilon), \mu_1^i(\varepsilon), \mu_2^i(\varepsilon))$ von isolierten Lösungen besitzt, aus denen man mittels (34) zwei stetige Lösungskurven von $Lu - f(\lambda, u) = 0$, $B[u] = 0$ konstruieren kann, die sich in (u^*, λ^*) schneiden.

Beweis: Man betrachtet (33) wieder in $\varepsilon = 0$ und zeigt, daß (33) $_{\varepsilon=0}$ zwei linear unabhängige isolierte Lösungen besitzt. Das Theorem über implizite Funktionen liefert dann die Behauptung. Die Einzelheiten des Beweises ähneln sehr den Ausführungen in Abschnitt 1.3 und brauchen deshalb nicht vorgeführt zu werden.

Bemerkung

Zur numerischen Behandlung von (33) verwendet man die bekannten Standardverfahren und ε -Homotopien, die in $\varepsilon = 0$ starten.

6 NUMERISCHE RESULTATE

6.1 ZUR AUFLÖSUNG DER AUFTRETENDEN LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEME

Bei der Diskretisierung der in Kapitel 2, 3, 4 und 5 hergeleiteten nichtlinearen RWA'n sowie des Iterationsverfahrens in 2.5 mit Hilfe der Trapezregel(oder auch mit Multiple - Shooting - Verfahren) kommt man schließlich zu einer Folge von aufzulösenden linearen Gleichungssystemen. In allen Fällen haben diese folgende Gestalt bzw. Blockstruktur:

$$(1) \quad \begin{aligned} Au_0 + Bu_j &= f_0 \\ R_j u_j - L_j u_{j-1} &= f_j, \quad 1 \leq j \leq J \end{aligned}$$

mit $A, B, R_j, L_j \in \mathbb{R}^{m,m}$, $u_j, f_j \in \mathbb{R}^m$, m geeignet gewählt. KELLER [1] hat gezeigt, daß die - existent vorausgesetzte - Lösung u von (1) mit Hilfe einer Blockdreieckszerlegung in der Form

$$(2) \quad \begin{aligned} u_0 &= S_0^{-1} (f_0 - \sum_{j=1}^J S_j R_j^{-1} f_j) \\ u_j &= P_j u_{j-1} + R_j^{-1} f_j, \quad j = 1(1)J \\ P_j &= R_j^{-1} L_j, \quad 1 \leq j \leq J \\ S_J &= B, S_{j-1} = S_j P_j, \quad j = J(-1)2, \quad S_0 = A + S_1 P_1 \end{aligned}$$

dargestellt werden kann. Die Anzahl der wesentlichen Operationen, die man zur Auflösung von (1) benötigt, ist etwa gleich $(3J+1)(m^3 + m^2)$, wobei m als kleine natürliche Zahl festliegt. Man hat also ein lineares Wachstum des Aufwands mit der Anzahl der Gitterpunkte, womit man sehr zufrieden sein kann. Im Fall separierter Randbedingungen ergeben sich weitere Vereinfachungen, wodurch sich die Anzahl der Rechenoperationen nochmals verringert, vgl. KELLER [1].

6.2 BEISPIEL 1 - STABKNICKUNG

Wir kommen zurück auf das in Abschnitt 1.1 behandelte Beispiel, das auf die RJA

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & u_1' = -\lambda u_2 \\
 & u_2' = \sin u_1 \\
 & u_3' = \cos u_1 - 1 \\
 & u_2(0) = u_2(1) = u_3(0) = 0
 \end{aligned}$$

führt. Das linearisierte Problem lautet

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & w_1' = -\lambda w_2 \\
 & w_2' = w_1 \\
 & w_3' = 0 \\
 & w_2(0) = w_2(1) = w_3(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_0^{(n)} = n^2 \pi^2$, die Eigenfunktionen

$$(5) \quad \varphi^{(n)}(t) = (\sqrt{2} \cos n\pi t, \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin n\pi t, 0)^T, \quad n = 1, 2, \dots$$

Aus Gründen der Vergleichbarkeit mit LANGFORD's [1] Ergebnissen haben wir hier eine andere Normierung als in Kap. 1 verwendet. Das zu (4) adjungierte Problem ist

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & z_1' = -z_2 \\
 & z_2' = \lambda z_1 \\
 & z_3' = 0 \\
 & z_1(0) = z_1(1) = z_3(1) = 0.
 \end{aligned}$$

Die Eigenfunktionen hierzu sind

$$(7) \quad \psi_0^{(n)}(t) = (\sin n\pi t, -n\pi \cos n\pi t, 0)^T, \quad n=1,2,\dots$$

Im folgenden betrachten wir zunächst den Fall

$$\lambda_0 = \lambda_0^{(1)} = \pi^2, \quad \varphi = \varphi^{(1)}.$$

Man bestätigt leicht, daß der Bifurkationskoeffizient a_0 ungleich Null ist. Man kann also die Verfahren aus Kap. 2 anwenden. Die RWA (2.12) hat hier die Gestalt

$$\begin{aligned} v_1' &= -\lambda_0 v_2 - \varphi_2 v_4 - \varepsilon v_4 v_2 \\ v_2' &= \varepsilon^{-2} [\sin(\varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 v_1) - \varepsilon \varphi_1] \\ v_3' &= \varepsilon^{-2} [\cos(\varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 v_1) - 1] \\ (8) \quad v_4' &= 0 \\ v_5' &= \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \varphi_3 v_3 \\ v_2(0) &= v_2(1) = v_3(0) = v_5(0) = v_5(1) = 0 \end{aligned}$$

mit $v_4 \cong \gamma(\varepsilon)$, $v_5 \cong \mu$. Um Auslöschung zu verhindern, kann man bei v_2' und v_3' die trigonometrischen Funktionen in Reihen entwickeln oder die Ausdrücke mit doppelter Genauigkeit berechnen.

Zur Lösung von (8) wurde die Trapezregel mit $J = 10, 20, 30, 40$ und äquidistanten Stützstellen über $[0, 1]$ benutzt. (8) wurde für eine Reihe von ε -Werten zwischen 0.001 und 4 numerisch gelöst. Alternativ dazu setzten wir das Iterationsverfahren aus 2.5, ebenfalls mit Trapezregel diskretisiert (gleiche Schrittweiten), ein. Für kleines $|\varepsilon|$ ist die Konvergenz hier sehr schnell, wird mit wachsendem $|\varepsilon|$ langsamer und bleibt ab $|\varepsilon| \approx 1.2$ aus.

Beim zur Auflösung des durch Diskretisierung von (8) entstandenen nichtlinearen Gleichungssystems mit dem Newton-Verfahren zeigten sich keine Schwierigkeiten (Homotopieschrittweiten $\Delta\varepsilon : 0.01 \leq \Delta\varepsilon \leq 0.25$)

In Tabelle 1 ist $u_1(\varepsilon; 0)$, die erste Komponente der Lösung an der Stelle $t = 0$ wiedergegeben. In $t = 0$ tritt auch das Maximum von $u_1(t) = \Theta(t)$ auf. In der 2. Spalte stehen LANGFORD's [2] Ergebnisse, gerundet auf 10 wesentliche Stellen; die AWA'n wurden dort mit einem Adams - Verfahren der Ordnung 7 und der Schrittweite $h = 1/128$ gelöst. In der letzten Spalte stehen unsere durch Extrapolation auf die Schrittweite $h = 0$ gewonnenen Ergebnisse - insgesamt ist dies also ein Verfahren der Ordnung 8.

In Tabelle 2 finden sich entsprechende Resultate für $\lambda(\varepsilon)$.

Die Ergebnisse in Tabelle 1 und 2 wurden mit beiden Verfahren (aus 2.4 und 2.5) erzielt.

Zur Genauigkeitskontrolle dienen die Resultate von LANGFORD [2], die innerhalb der Stellenzahl als exakt gelten können. Dies belegt die hohe, mit unseren Verfahren erzielbare Genauigkeit.

ε	It.-Verf. aus 2.5	Trapezr. Newton	Trapezr. Newt. k. FM.
0.001	2	2	2
0.01	2	2	2
0.1	3	2	2
0.25	4	2	3
0.5	6	3	5
0.75	9	3	6
1	9	3	6
1.125	11	4	7

In nebenstehender Tabelle ist in Abhängigkeit von ε die Anzahl der jeweils benötigten Iterationsschritte wiedergegeben, und zwar für: 1. das Iterationsverfahren aus 2.5, 2. das Newton - Verfahren

zur Auflösung der Trapezregl - Differenzengleichung für (9) (Startwert jeweils das Ergebnis des vorigen ε - Wertes), 3. das Newton - Verfahren mit konstanter Funktionalmatrix (sonst wie 2.)

Abb. 6.1 zeigt ein Bifurkationsdiagramm: $u_1(\lambda; 0)$ ist über λ aufgetragen.

In Abb. 6.2, 6.3 und 6.4 ist für verschiedene ε - Werte der berechnete Zustand des geknickten Stabes aufgezeichnet. Die zugehörige Kraft λ ist jeweils eingetragen.

Für negative ε erhält man $\lambda(\varepsilon) = \lambda(-\varepsilon)$ und $u(\varepsilon) = -u(-\varepsilon)$.

Wie hier im Fall $\lambda_0^{(1)} = \pi^2$ vorgeführt, kann man ganz analog die Verzweigungen an den höheren Eigenwerten $\lambda_0^{(n)}$, $n > 1$, berechnen. Es ergeben sich dabei keine neuen Effekte gegenüber dem bisher betrachteten Fall. Auch sind diese Verzweigungen physikalisch nicht mehr so interessant, da der stabile Zustand für $\lambda > \lambda_0^{(1)}$ auf dem ersten, in $\lambda = \lambda_0^{(1)}$ bifurkierenden Zweig liegt. Der Vollständigkeit halber sind in Abb. 6.5 und 6.6 die Zustände des Stabes für die Verzweigung in $\lambda_0^{(2)} = 4\pi^2 = 39.478417...$ aufgezeichnet.

ε	$u_1(\varepsilon; 0)$ (numerisch berechnet)					
	Langford $h=1/128$	$J=10, h=0.1$	$J=20, h=0.05$	$J=30, h=0.3$	$J=40, h=0.25$	EXTRAPOLIERT
0.001	---	1.414213550 _{10⁻³}	1.414213548 _{10⁻³}	1.414213548 _{10⁻³}	1.414213547 _{10⁻³}	1.414213547 _{10⁻³}
0.01	1.414212089 _{10⁻²}	1.414212324 _{10⁻²} (3 _{10⁻⁹})	1.414212150 _{10⁻²} (6 _{10⁻¹⁰})	1.414212116 _{10⁻²} (2 _{10⁻¹⁰})	1.414212104 _{10⁻²} (2 _{10⁻¹¹})	1.414212089 _{10⁻²} (-)
0.1	1.414066138 _{10⁻¹}	1.414089686 _{10⁻¹} (2 _{10⁻⁶})	1.414072209 _{10⁻²} (6 _{10⁻⁷})	1.414068851 _{10⁻¹} (2 _{10⁻⁷})	1.414067667 _{10⁻¹} (1 _{10⁻⁷})	1.414066137 _{10⁻¹} (1 _{10⁻¹⁰})
0.25	3.533221280 _{10⁻¹}	3.533589509 _{10⁻¹} (3 _{10⁻⁵})	3.533316184 _{10⁻¹} (1 _{10⁻⁵})	3.533263695 _{10⁻¹} (4 _{10⁻⁶})	3.53245184 _{10⁻¹} (2 _{10⁻⁶})	3.533221279 _{10⁻¹} (1 _{10⁻¹⁰})
0.5	7.052300922 _{10⁻¹}	7.055254683 _{10⁻¹} (3 _{10⁻⁴})	7.053061000 _{10⁻¹} (7 _{10⁻⁵})	7.052640521 _{10⁻¹} (3 _{10⁻⁵})	7.052492298 _{10⁻¹} (2 _{10⁻⁵})	7.052300920 _{10⁻¹} (2 _{10⁻¹⁰})
0.75	1.054170208	1.055171147 (1 _{10⁻³})	1.054427080 (3 _{10⁻⁴})	1.054284919 (1 _{10⁻⁴})	1.054234840 (6 _{10⁻⁵})	1.054170207 (1 _{10⁻⁹})
1.0	1.398276153	1.400659666 (2 _{10⁻³})	1.398865454 (6 _{10⁻⁴})	1.398548049 (3 _{10⁻⁴})	1.398429310 (1 _{10⁻⁴})	1.398276152 (1 _{10⁻⁹})
1.125	1.567787687	1.571188331 (3 _{10⁻³})	1.568654878 (9 _{10⁻⁴})	1.568174490 (4 _{10⁻⁴})	1.568005535 (2 _{10⁻⁴})	1.567787687 (-)

In Klammern steht jeweils der Fehler gegenüber der als exakt angenommenen Langford - Lösung

Tabelle 2

ε	$\lambda(\varepsilon)$ (numerisch berechnet) $\lambda_0 = 9.86960401...$					
	Langford $h=1/128$	$J=10, h=0.1$	$J=20, h=0.05$	$J=30, h=0.3$	$J=40, h=0.25$	EXTRAPOLIERT
0.001	—	9.869606868	9.869606869	9.869606868	9.869606868	9.869606871
0.01	9.869851145	9.869851144 (1_{10}^{-9})	9.869851145 (-)	9.869851145 (-)	9.869851145 (-)	9.869851145 (-)
0.1	9.894317016	9.894317427 (4_{10}^{-7})	9.894317122 (1_{10}^{-7})	9.894317063 (5_{10}^{-8})	9.894317043 (3_{10}^{-8})	9.894317016 (-)
0.25	1.002533540 $_{10}^1$	1.002535177 $_{10}^1$ (2_{10}^{-5})	1.002533960 $_{10}^1$ (4_{10}^{-6})	1.002533729 $_{10}^1$ (2_{10}^{-6})	1.002533646 $_{10}^1$ (1_{10}^{-6})	1.002533540 $_{10}^1$ (-)
0.5	1.051136621 $_{10}^1$	1.051164459 $_{10}^1$ (3_{10}^{-4})	1.051143788 $_{10}^1$ (7_{10}^{-5})	1.051139824 $_{10}^1$ (3_{10}^{-5})	1.051138426 $_{10}^1$ (2_{10}^{-5})	1.051136621 $_{10}^1$ (-)
0.75	1.138917977 $_{10}^1$	1.139074216 $_{10}^1$ (2_{10}^{-3})	1.138958121 $_{10}^1$ (4_{10}^{-4})	1.138935908 $_{10}^1$ (2_{10}^{-4})	1.138928080 $_{10}^1$ (1_{10}^{-4})	1.138917976 $_{10}^1$ (1_{10}^{-8})
1.0	1.278025681 $_{10}^1$	1.278598532 $_{10}^1$ (6_{10}^{-3})	1.278172439 $_{10}^1$ (2_{10}^{-3})	1.278091196 $_{10}^1$ (7_{10}^{-4})	1.278062589 $_{10}^1$ (4_{10}^{-4})	1.278025681 $_{10}^1$ (-)
1.125	1.373150535 $_{10}^1$	1.374157273 $_{10}^1$ (1_{10}^{-2})	1.373407970 $_{10}^1$ (3_{10}^{-3})	1.373265418 $_{10}^1$ (1_{10}^{-3})	1.373215248 $_{10}^1$ (6_{10}^{-4})	1.373150535 $_{10}^1$ (-)

In Klammern steht jeweils der Fehler gegenüber der als exakt angenommenen Langford - Lösung

Abb. 6.1 Bifurkationsdiagramm

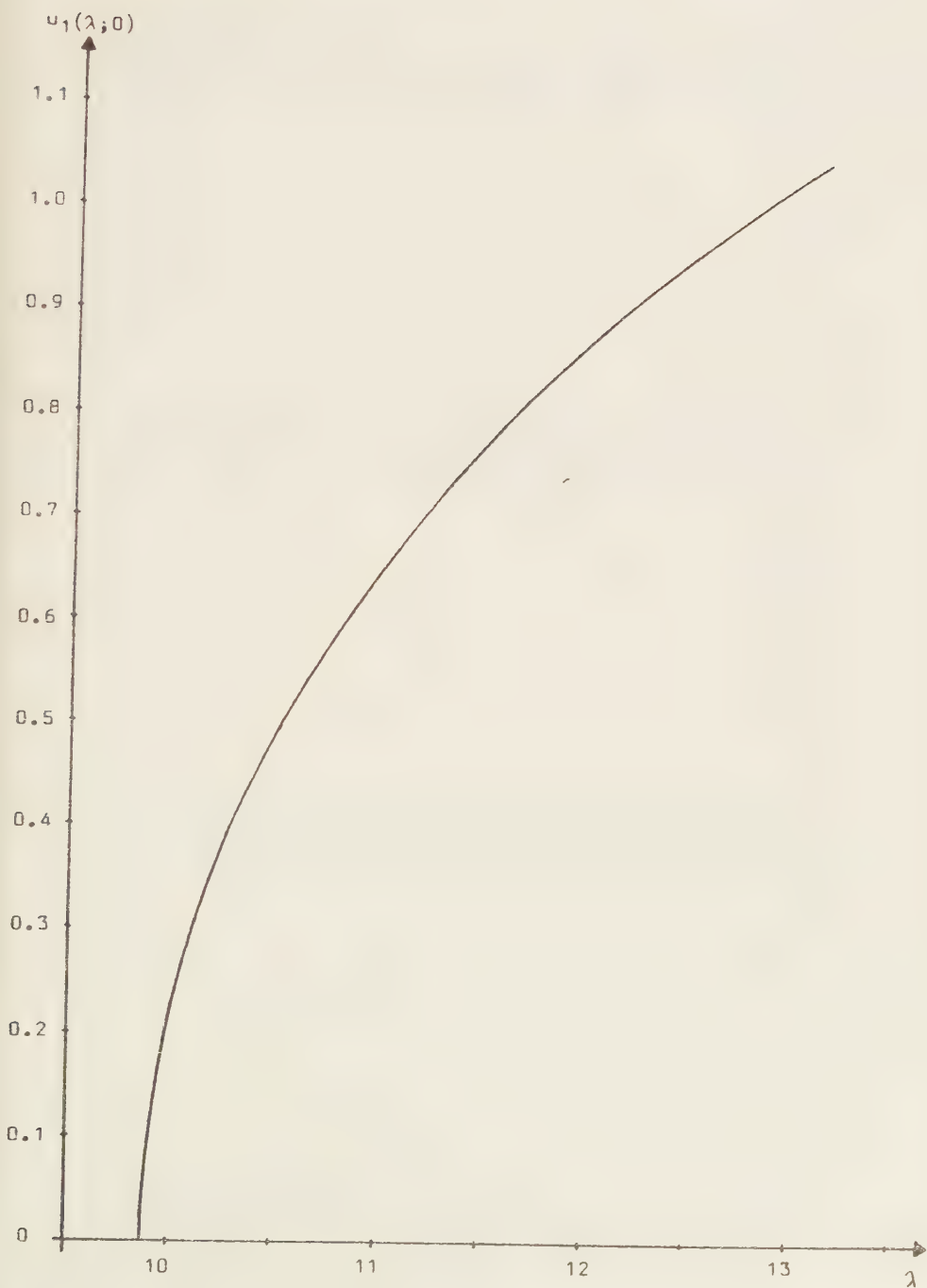


Abb. 6.2

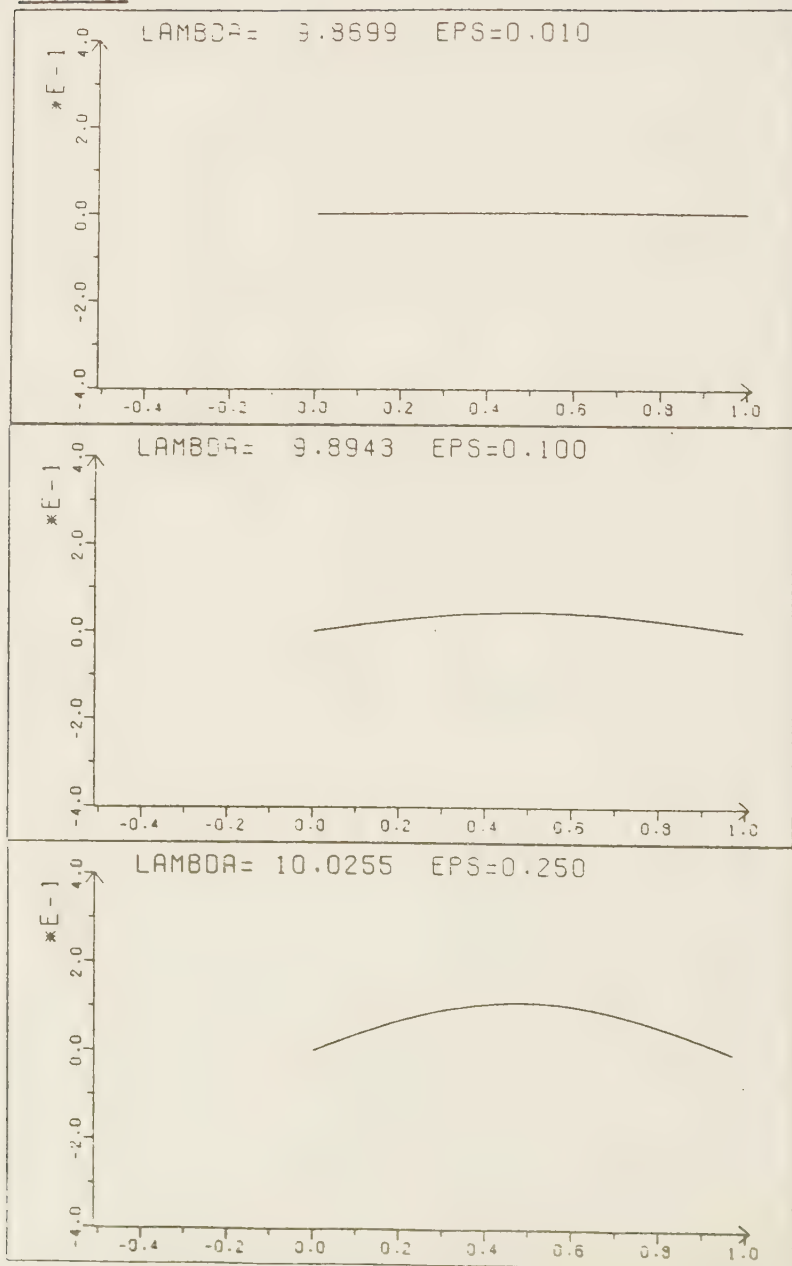


Abb. 6.3

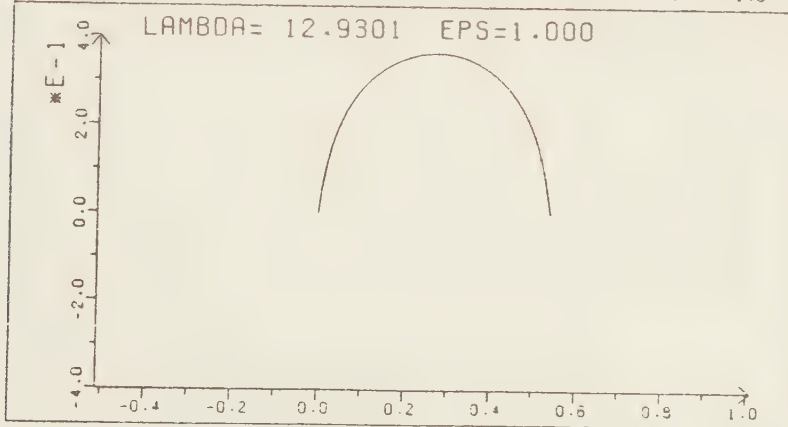
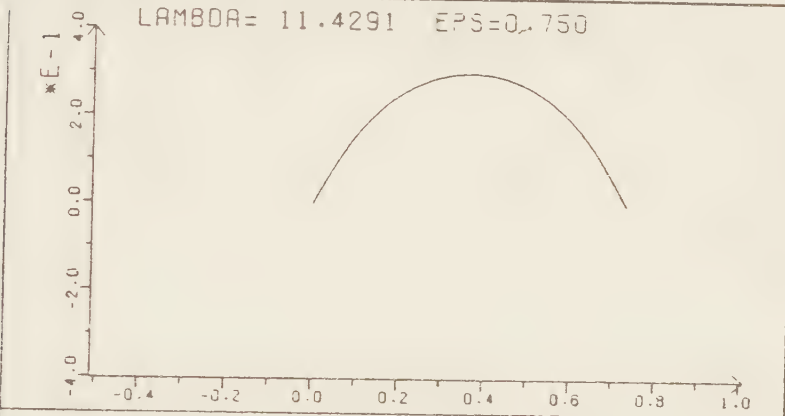
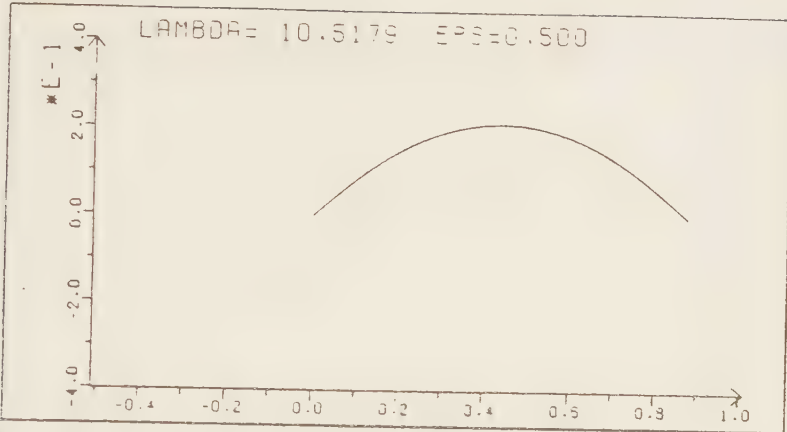


Abb. 6.4

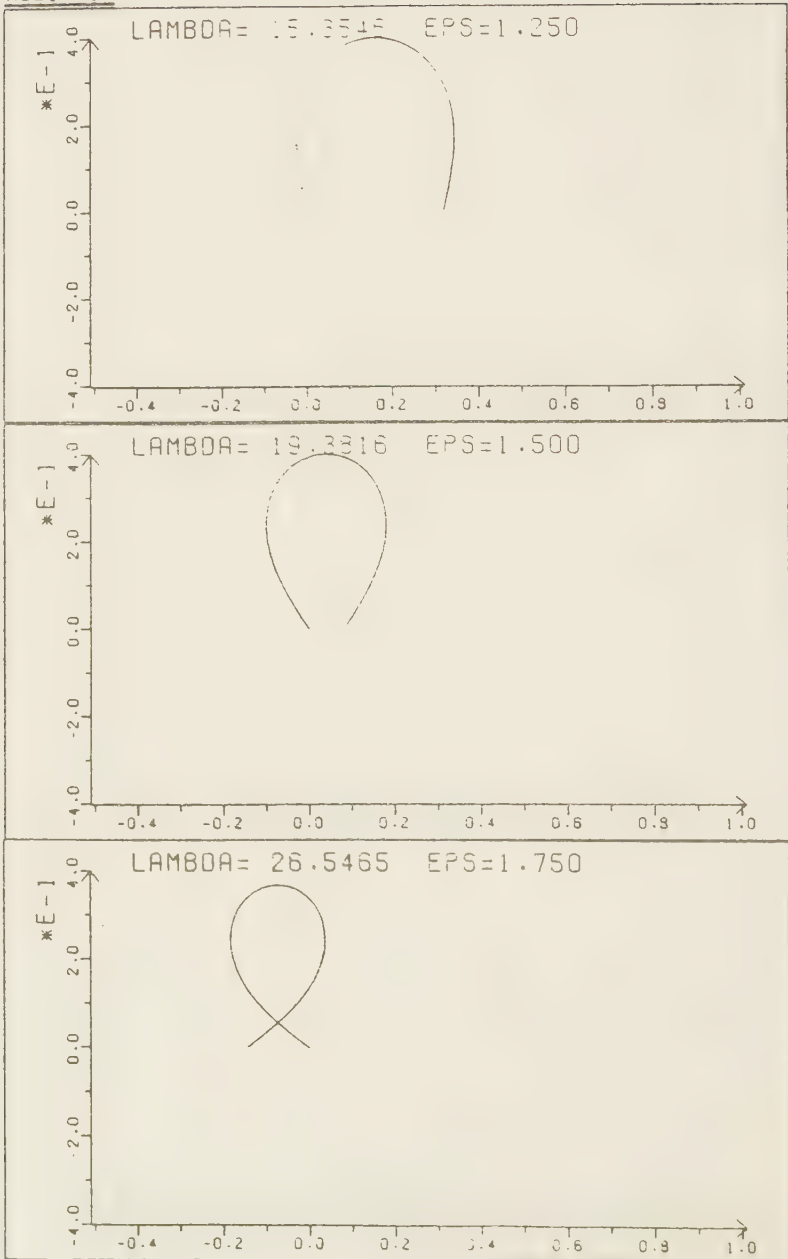


Abb. 6.5

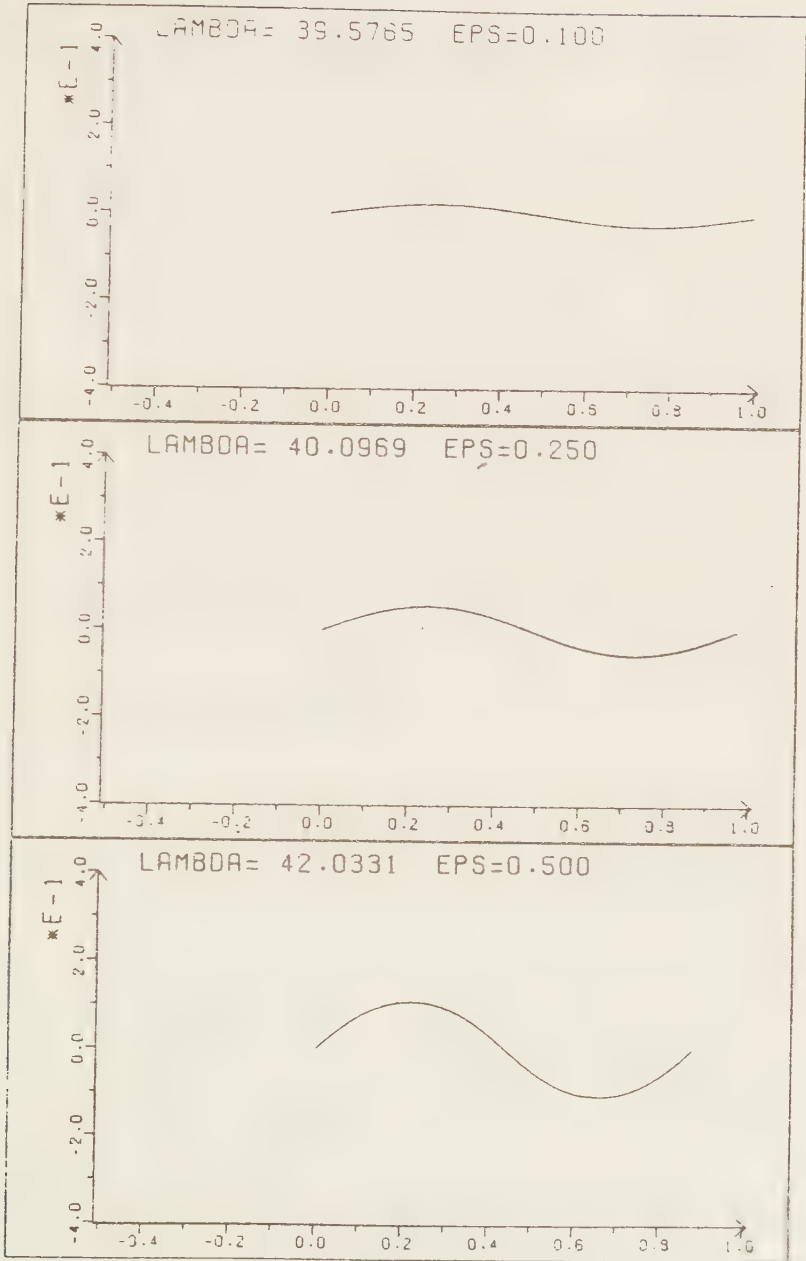
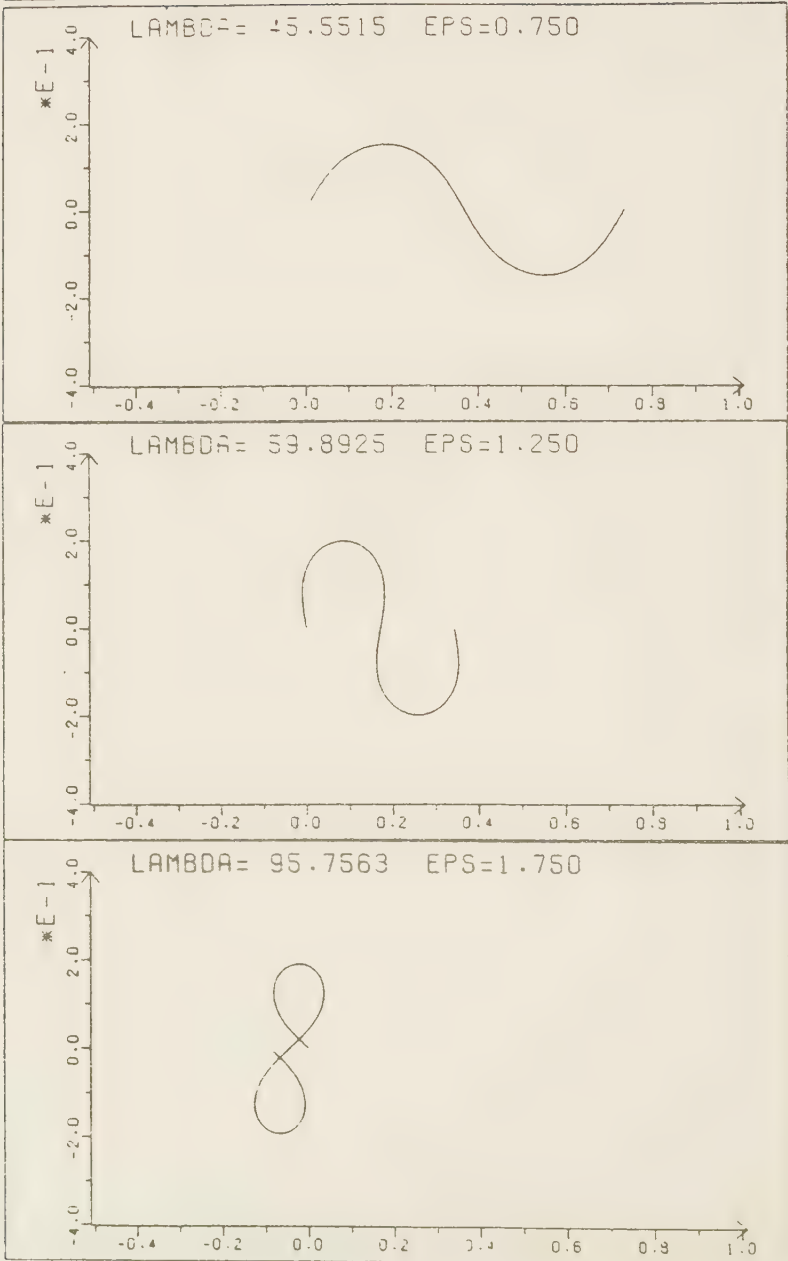


Abb. 6.6



6.3 BEISPIEL 2 - HOPF - BIFURKATION: FEEDBACK - INHIBITION OZILLATOR

Aus der physikalischen Chemie stammt folgendes Beispiel von GLASS [1]. Das Verhalten der Konzentrationen x_i von N Substanzen in einer Reaktionskette wird beschrieben durch das Differentialgleichungssystem

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{0.5^\mu}{x_N^\mu + 0.5^\mu} - x_1 \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{x_{i-1}^\mu}{x_{i-1}^\mu + 0.5^\mu} - x_i, \quad 2 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Dabei hemmt die letzte Substanz das Entstehen der ersten Substanz. Es werden periodische Lösungen von (9) gesucht; μ ist ein reeller Parameter. Für alle $\mu > 0$ ist $x_i \equiv 0.5$, $1 \leq i \leq N$, kritischer Punkt von (9). Nach Einführung neuer Variabler $y_i = x_i - 0.5$, $1 \leq i \leq N$, ergibt sich nach Umformungen für $N = 3$

$$(10) \quad \frac{dy}{ds} = Ay + G(y, \mu)$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad G(y, \mu) = \begin{bmatrix} -g(y_3, \mu) \\ g(y_1, \mu) \\ g(y_2, \mu) \end{bmatrix},$$

$$g(y_i, \mu) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + 2y_i)^\mu - 1}{(1 + 2y_i)^\mu + 1} \right] - 2y_i.$$

y genüge den Einschränkungen $|y_i| \leq 1/2$, $i=1,2,3$. g ist analytisch und gestattet eine Entwicklung der Form

$$g(y_i, \mu) = \frac{1}{2}(\mu-4)y_i - 2y_i^2 - 8y_i^3 + \dots$$

Im Punkt $(\mu, y) = (4, 0)$ erfolgt Hopf - Bifurkation. Die Eigenwerte von A sind -3 , $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$, d.h. $\beta = \sqrt{3}$. Folglich ist $T_0 = 2\pi/\sqrt{3}$. Wir transformieren (10) mit Hilfe

von $t = 2\pi s/T$ (T Periode) auf die Form

$$(11) \quad \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sqrt{3}} Ay = \frac{T}{2\pi} G(y, \mu) + \left[\frac{T}{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] Ay$$

$$B_0 y(0) + B_{2\pi} y(2\pi) = 0$$

mit

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{2\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vgl. Abschnitt 3.2. Das linearisierte Problem lautet

$$(12) \quad \frac{dz}{dt} - \frac{1}{\sqrt{3}} Az = 0, \quad B_0 z(0) + B_{2\pi} z(2\pi) = 0$$

und besitzt einen eindimensionalen Nullraum, der von

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \sin t$$

aufgespannt wird. Man bestätigt, daß die Bifurkationsmatrix D aus 3.1 regulär ist. Damit kann die RUA (3.8) nach Satz 3.2 definiert und mit Hilfe von Standardverfahren numerisch gelöst werden.

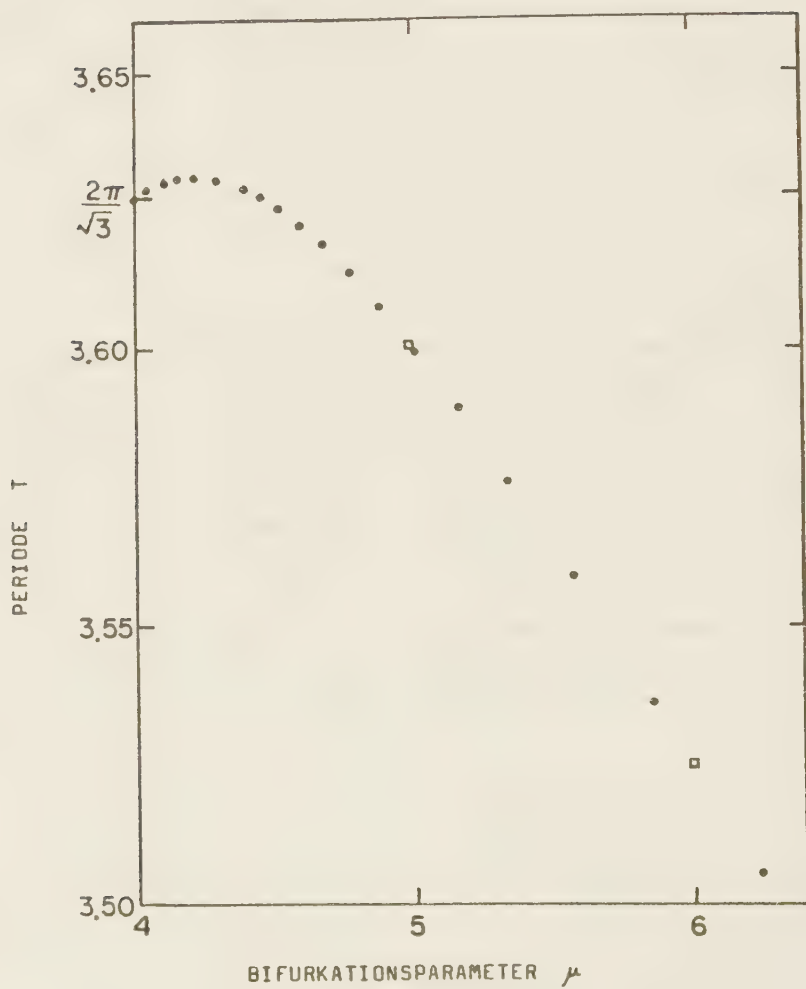
Wir benutzten die Trapezregel, äquidistante Stützstellen, $J = 10, 20, 30, 40$ und Extrapolation auf $h = 0$, d.h. ein Verfahren der Ordnung 8. Die numerischen Ergebnisse zeigten ausgezeichnete Übereinstimmung mit LANGFORD's [2] Zahlenwerten; Über Ordnung und Schrittweite der dort benutzten Adams - Verfahren fehlen Angaben. In Tabelle 3 sind für verschiedene ε die Werte von $\mu(\varepsilon)$, $I(\varepsilon)$ und $y_2(\varepsilon; 0)$, $y_3(\varepsilon; 0)$ wiedergegeben. In Abb. 6.7 ist die Periode T über μ aufgetragen.

Die Rechnungen zu Beispiel 1 und 2 wurden auf einer TR 440 der RHRK Kaiserslautern (einfache Genauigkeit $\hat{=}$ 10 Dezimalstellen) durchgeführt.

Tabelle 3

	ϵ	$\mu(\epsilon)$	$T(\epsilon)$	$y_2(0)$	(0)
3.1/3.2 Trapezregel Extr.	0.001	4.000099640	3.627599063	$-7.070567558 \cdot 10^{-4}$	$-7.071197132 \cdot 10^{-4}$
	0.01	4.000989625	3.627635333	$-7.066288276 \cdot 10^{-3}$	$-7.072094627 \cdot 10^{-3}$
	0.06	4.036346771	3.629817625	$-4.231152711 \cdot 10^{-2}$	$-4.241224190 \cdot 10^{-2}$
	0.1	4.104895314	3.630447552	$-7.057206696 \cdot 10^{-2}$	$-7.056073357 \cdot 10^{-2}$
	0.14	4.218680854	3.631415230	$-9.920252019 \cdot 10^{-2}$	$-9.846885325 \cdot 10^{-2}$
	0.18	4.396391034	3.629292398	$-1.286927575 \cdot 10^{-1}$	$-1.259257633 \cdot 10^{-1}$
	0.2	4.520288042	3.625695476	$-1.439923171 \cdot 10^{-1}$	$-1.393493112 \cdot 10^{-1}$
	0.22	4.678378632	3.619129045	$-1.598348906 \cdot 10^{-1}$	$-1.524245809 \cdot 10^{-1}$
	0.24	4.885280959	3.607964805	$-1.763872744 \cdot 10^{-1}$	$-1.649549722 \cdot 10^{-1}$
	0.26	5.166873833	3.589514068	$-1.938426208 \cdot 10^{-1}$	$-1.766283619 \cdot 10^{-1}$
Ergebnisse von LANGFORD[2]	0.001	4.00009890	3.62759909	$-7.0705700 \cdot 10^{-4}$	$-7.0712000 \cdot 10^{-4}$
	0.01	4.00098962	3.62753533	$-7.0662880 \cdot 10^{-3}$	$-7.0720950 \cdot 10^{-3}$
	0.06	4.03634677	3.62881763	$-4.2311530 \cdot 10^{-2}$	$-4.2412240 \cdot 10^{-2}$
	0.1	4.10489524	3.63044758	$-7.0572070 \cdot 10^{-2}$	$-7.0560730 \cdot 10^{-2}$
	0.14	4.21868084	3.63141525	$-9.9202520 \cdot 10^{-2}$	$-9.8486840 \cdot 10^{-2}$
	0.18	4.39639108	3.62929238	$-1.2869276 \cdot 10^{-1}$	$-1.2592576 \cdot 10^{-1}$
	0.2	4.52028812	3.62569541	$-1.4399230 \cdot 10^{-1}$	$-1.3934930 \cdot 10^{-1}$
	0.22	4.67837912	3.61912877	$-1.5983486 \cdot 10^{-1}$	$-1.5242457 \cdot 10^{-1}$
	0.24	4.88528209	3.60796426	$-1.7638718 \cdot 10^{-1}$	$-1.6495494 \cdot 10^{-1}$
	0.26	5.16687872	3.58950766	$-1.9384223 \cdot 10^{-1}$	$-1.7662808 \cdot 10^{-1}$

Abb. 6.7 FEEDBACK - INHIBITION - OSZILLATOR



■ Ergebnisse von GLASS, vgl. LANGFORD [2].

6.4 BEISPIEL 3 - GESTÖRTE BIFURKATION

Bei folgendem, unter anderem schon von KEENER [2] untersuchtem Problem handelt es sich um einen homogenen, elastischen Stab der Länge π mit einer Anfangsverbiegung (initial imperfection), dessen Enden in Scharnieren gelagert sind und der auf einem nichtlinear elastischen Untergrund ruht. Der Stab wird einer axialen Last ausgesetzt. Für die seitliche Auslenkung $w(x)$ erhält man (vgl. KEENER [2]) die RWA

$$(13) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + 2\lambda \frac{d^2 w}{dx^2} + w - w^3 = -2\lambda \tau \frac{d^2 q_0}{dx^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$w(0) = w(\pi) = 0, \quad w''(0) = w''(\pi) = 0, \quad ' = \frac{d}{dx}.$$

λ stellt die axiale Last dar, $\lambda > 0$ für Kompression. Die initial imperfection hat die Gestalt $q_0(x)$ mit Amplitude τ .

Für $\tau = 0$ hat man es mit einem normalen Verzweigungsproblem (nach Kap. 2) zu tun. Für $\tau \neq 0$ liegt gestörte Verzweigung vor (vgl. Kap. 4).

Wir schreiben (13) als System 1. Ordnung in der Form $Lu - f(\lambda, \tau, u) = 0$, $B[u] = 0$ mit

$$Lu = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda, \tau, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1^3 - 2\lambda u_3 - 2\lambda \tau q_0'' \end{bmatrix}$$

sowie Randbedingungen $u_1(0) = u_1(\pi) = u_3(0) = u_3(\pi) = 0$.

Für $\tau = 0$ ist $\lambda_0^{(n)} = \frac{1}{2}(n^2 + n^{-2})$, $n = 1, 2, \dots$. Verzweigungspunkt (vgl. KEENER [2]). Wir behandeln hier nur den Fall $\lambda_0 := \lambda_0^{(1)} = 1$. Zu λ_0 gehört die Eigenfunktion

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) = (\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x)^T =: (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^T$$

Die RWA (12) berechnet sich für dieses Beispiel ($\tau = 0$) zu

$$\begin{aligned} (14) \quad & v_i^1 = v_{i+1}, \quad i=1, 2, 3 \\ & v_4^1 = -v_1 - 2v_3 + \varepsilon(\varphi_1 + \varepsilon v_1)^3 - 2v_5(\varphi_3 + \varepsilon v_3) \\ & v_5^1 = 0 \\ & v_6^1 = \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \varphi_3 v_3 + \varphi_4 v_4 \\ & v_1(0) = v_1(\pi) = v_3(0) = v_3(\pi) = v_5(0) = v_5(\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$(v_5 \cong \gamma, v_6 \cong \mu).$$

Zur Bestimmung der Familie von nichtisolierten Lösungen unseres Problems formuliert man nach (4.8/9) folgende RWA der Dimension $N = 12$:

$$\begin{aligned} (15) \quad & v_i^1 = v_{i+1}, \quad i=1, 2, 3 \\ & v_4^1 = -v_4 - 2v_3 + \varepsilon(\varphi_1 + \varepsilon v_1)^3 - 2v_9(\varphi_3 + \varepsilon v_3) - 2(1 + \varepsilon v_9)v_{10} \\ & v_i^1 = v_{i+1}, \quad i=2, 6, 7 \\ & v_8^1 = -v_5 - 2v_7 + 3\varepsilon(\varphi_1 + \varepsilon v_1)^2(\varphi_1 + \varepsilon v_5) - 2v_9(\varphi_3 + \varepsilon v_7) \\ & v_i^1 = 0, \quad i=9, 10 \\ & v_{11}^1 = \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \varphi_3 v_3 + \varphi_4 v_4 \\ & v_{12}^1 = \varphi_1 v_5 + \varphi_2 v_6 + \varphi_3 v_7 + \varphi_4 v_8 \\ & v_1(0) = v_1(\pi) = v_3(0) = v_3(\pi) = v_5(0) = v_5(\pi) = 0 \\ & v_7(0) = v_7(\pi) = v_{11}(0) = v_{11}(\pi) = v_{12}(0) = v_{12}(\pi) = 0, \end{aligned}$$

$$(v_5 \cong \chi_1, \dots, v_8 \cong \chi_4, v_9 \cong \lambda_1, v_{10} \cong \tau_1, v_{11} \cong \mu_1, v_{12} \cong \mu_2).$$

Zur Bestimmung von Zweigen durch nichtisolierte Lösungen ergibt sich nach (4.16/17) die RWA

$$\begin{aligned}
 v_i^! &= v_{i+1}, \quad i=1,2,3 \\
 v_4^! &= [-1 + 3w_{01}^2]v_1 - 2w_0v_2 + 3w_{01}(\bar{\varphi}_1 + \delta v_1)^2 \\
 &\quad + \delta(\bar{\varphi}_1 + \delta v_1)^3 - 2v_5(w_{03} + \delta\bar{\varphi}_3 + \delta^2v_3) - 2v_5\tau_0q_0'' \\
 (16) \quad v_5^! &= 0 \\
 v_6^! &= \bar{\varphi}_1v_1 + \bar{\varphi}_2v_2 + \bar{\varphi}_3v_3 + \bar{\varphi}_4v_4, \\
 v_1(0) &= v_1(\pi) = v_3(0) = v_3(\pi) = v_6(0) = v_6(\pi) = 0,
 \end{aligned}$$

$$(v_1 \approx w_{11}, \dots, v_4 \approx w_{14}, v_5 \approx \mu_1, v_6 \approx \kappa).$$

Als q_0 wählen wir $q_0 = -\sin x$. Die numerische Behandlung der RWA'n (14) bis (16) wurde mit Hilfe der Trapezregel vorgenommen.

Ergebnisse:

1. Fall: $\tau = 0$ (Verzweigung bei $\lambda_0 = 1$)

Schrittweiten $h = \pi/10, \pi/20, \pi/30, \pi/40$, anschließend Extrapolation.

ϵ	$\lambda^E(\epsilon)$
0.001	$9.9999962_{10^{-1}}$
0.01	$9.9996249_{10^{-1}}$
0.05	$9.9906249_{10^{-1}}$
0.1	$9.9624985_{10^{-1}}$
0.2	$9.8499766_{10^{-1}}$
0.3	$9.6623821_{10^{-1}}$
0.4	$9.3996294_{10^{-1}}$
0.5	$9.0616012_{10^{-1}}$

$\lambda^E(\epsilon)$ bezeichnet die extrapolierte Näherung für $\lambda(\epsilon)$. $u^E(\epsilon; x)$ hat die Form $\varphi_0(x) + O(\epsilon^2)$. Wir verzichten auf eine Wiedergabe der Zahlenwerte.

2. Fall: $\tau \neq 0$ (Gestörte Verzweigung)

Zur Berechnung der nichtisolierten Lösungen:

Schrittweiten $h = \pi/30, \pi/60, \pi/90$, Extrapolation.

Zur Berechnung der Zweige durch nichtisolierte Lösungen:

Schrittweiten $h = \pi/10, \pi/20, \pi/30$, Extrapolation.

$\varepsilon = 0.01, \lambda^E(\varepsilon) = 9.99988750 \cdot 10^{-1}, \tau^E(\varepsilon) = -7.5008497 \cdot 10^{-7}$			
δ	$\lambda^E(\varepsilon, \delta)$	δ	$\lambda^E(\varepsilon, \delta)$
0.01	$9.9981415 \cdot 10^{-1}$	-0.005	$9.9984166 \cdot 10^{-1}$
0.05	$9.9866501 \cdot 10^{-1}$	-0.007	$9.9974976 \cdot 10^{-1}$
0.1	$9.9555259 \cdot 10^{-1}$	-0.009	$9.9926420 \cdot 10^{-1}$
0.2	$9.8380937 \cdot 10^{-1}$	-0.0095	$9.9853269 \cdot 10^{-1}$
0.3	$9.6469583 \cdot 10^{-1}$		
0.4	$9.3817701 \cdot 10^{-1}$		
0.5	$9.0420589 \cdot 10^{-1}$		

$\varepsilon = 0.1, \lambda^E(\varepsilon) = 9.8874927 \cdot 10^{-1}, \tau^E(\varepsilon) = -7.5859315 \cdot 10^{-4}$			
δ	$\lambda^E(\varepsilon, \delta)$	δ	$\lambda^E(\varepsilon, \delta)$
0.01	$9.8864663 \cdot 10^{-1}$	-0.01	$9.8863212 \cdot 10^{-1}$
0.05	$9.8662043 \cdot 10^{-1}$	-0.05	$9.8423765 \cdot 10^{-1}$
0.1	$9.8143835 \cdot 10^{-1}$	-0.07	$9.7533371 \cdot 10^{-1}$
0.2	$9.6432598 \cdot 10^{-1}$	-0.08	$9.6393585 \cdot 10^{-1}$
0.3	$9.3920161 \cdot 10^{-1}$	-0.09	$9.3105027 \cdot 10^{-1}$
0.4	$9.0638578 \cdot 10^{-1}$	-0.095	$8.7203138 \cdot 10^{-1}$
0.5	$8.6594583 \cdot 10^{-1}$		

$\epsilon = 0.2, \lambda^E(\epsilon) = 9.549834 \cdot 10^{-1}, \tau^E(\epsilon) = -6.2847410 \cdot 10^{-3}$			
δ	$\lambda^E(\epsilon, \delta)$	δ	$\lambda^E(\epsilon, \delta)$
0.01	$9.5488504 \cdot 10^{-1}$	-0.01	$9.5487829 \cdot 10^{-1}$
0.05	$9.5266328 \cdot 10^{-1}$	-0.05	$9.5176807 \cdot 10^{-1}$
0.1	$9.4660112 \cdot 10^{-1}$	-0.1	$9.3779670 \cdot 10^{-1}$
0.2	$9.2603878 \cdot 10^{-1}$	-0.12	$9.2574511 \cdot 10^{-1}$
0.3	$8.9608400 \cdot 10^{-1}$	-0.15	$8.8951262 \cdot 10^{-1}$
0.4	$8.5764420 \cdot 10^{-1}$	-0.16	$8.6657178 \cdot 10^{-1}$
0.5	$8.1107520 \cdot 10^{-1}$	-0.18	$7.6841392 \cdot 10^{-1}$

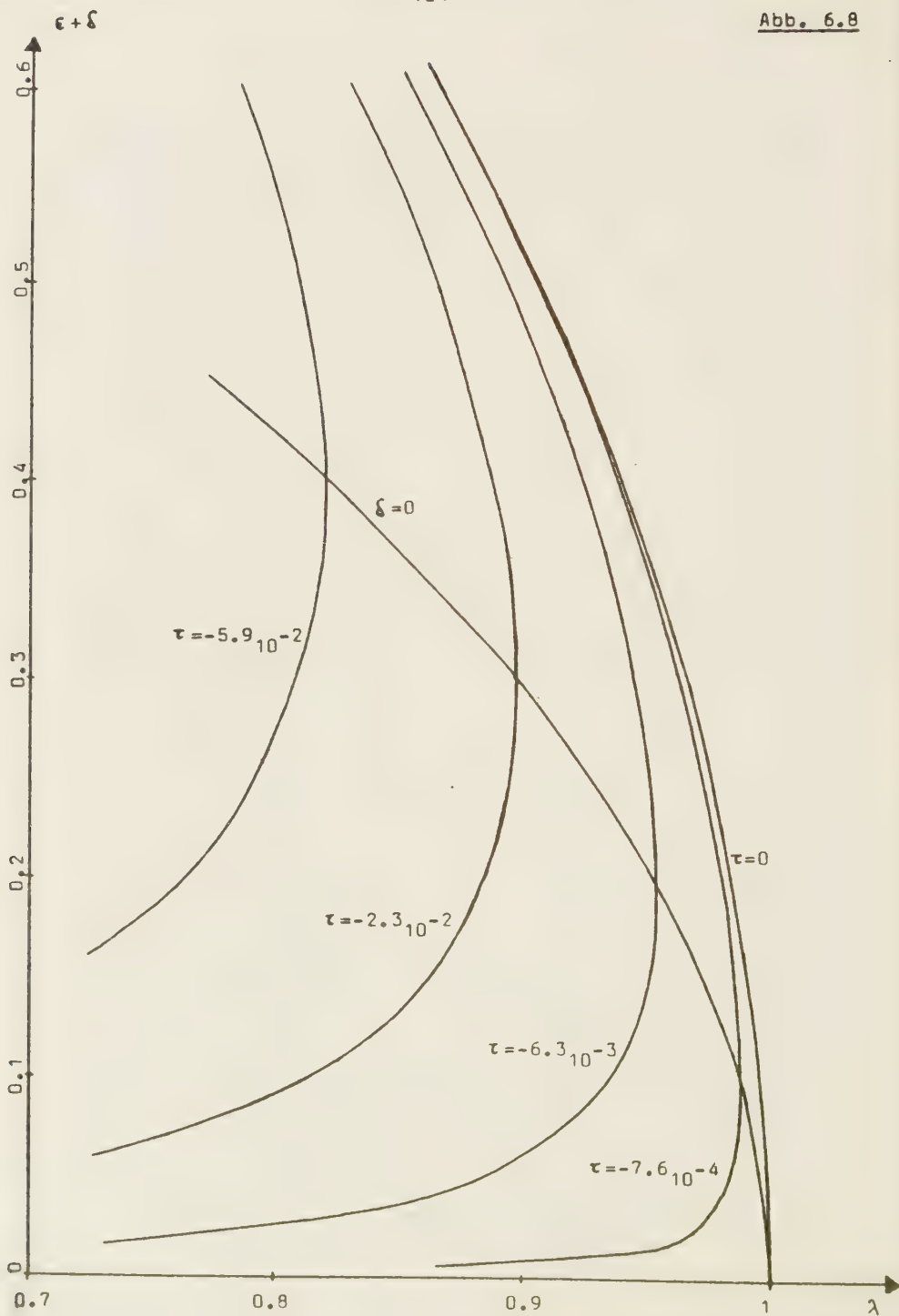
$\epsilon = 0.3, \lambda^E(\epsilon) = .9869209 \cdot 10^{-1}, \tau^E(\epsilon) = -2.2548213 \cdot 10^{-2}$			
δ	$\lambda^E(\epsilon, \delta)$	δ	$\lambda^E(\epsilon, \delta)$
0.01	$8.9859191 \cdot 10^{-1}$	-0.01	$8.9858790 \cdot 10^{-1}$
0.05	$8.9635590 \cdot 10^{-1}$	-0.05	$8.9564279 \cdot 10^{-1}$
0.1	$8.9000901 \cdot 10^{-1}$	-0.1	$8.8557939 \cdot 10^{-1}$
0.2	$8.6772632 \cdot 10^{-1}$	-0.15	$8.6310941 \cdot 10^{-1}$
0.3	$8.3474611 \cdot 10^{-1}$	-0.2	$8.1592763 \cdot 10^{-1}$
0.4	$7.9232852 \cdot 10^{-1}$	-0.25	$6.9797416 \cdot 10^{-1}$
0.5	$7.4108772 \cdot 10^{-1}$		

Für $\epsilon = 0.4$ erhält man $\lambda^E(0.4) = 8.19825035 \cdot 10^{-1}$ und $\tau^E(0.4) = -5.8619569 \cdot 10^{-2}$.

Die zu $\lambda^E(\epsilon, \delta)$ gehörenden $u^E(\epsilon, \delta)$ haben die Form

$$u^E(\epsilon, \delta) = (\epsilon + \delta) \varphi_0 + \text{höhere Terme in } \epsilon \text{ und } \delta,$$

so daß wir auf Zahlenwerte verzichten. In Abb. 6.8 ist der Zusammenhang zwischen λ, ϵ und δ für $\tau = 0$ und $\tau \neq 0$



aufgetragen. Man erkennt deutlich das Verhalten der Lösungen des gestörten Problems, gegenübergestellt der ungestört der ungestörten Verzweigung. Im gestörten Fall tritt keine Verzweigung ein. Für kleines τ erhält man jedoch Lösungen, die quantitativ nur wenig vom Idealfall $\tau = 0$ abweichen. Auch die "Knicklast" (vgl. KEENER [2]), die für $\tau \neq 0$ durch die nichtisolierten Lösungen bestimmt wird, weicht nur gering von λ_0 , der Knicklast im Fall $\tau = 0$, ab. Für kleine Störungen, wie sie etwa durch Gravitationskräfte entstehen, scheint es deshalb gerechtfertigt, die viel weniger aufwendige (ungestörte) Bifurkationstheorie aus Kapitel 2 zur näherungsweisen Berechnung des Verzweigungsverhaltens zu benutzen. Dabei muß man sich darüber im Klaren sein, daß die Verhältnisse in der unmittelbaren Nähe des kritischen Punktes qualitativ falsch wiedergegeben werden, da ja i.a. keine Verzweigung stattfindet, wenn Störungen vorliegen.

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß unsere Ergebnisse gut mit KEENER's [2] Resultaten übereinstimmen, die durch asymptotische Entwicklungen gewonnen sind.

Die Rechnungen zu Beispiel 3 wurden auf der HB 66/80 des Rechenzentrums der Johannes Gutenberg - Universität Mainz mit einfacher Genauigkeit ($\hat{=}$ 8 Dezimalstellen) vorgenommen.

Bemerkung

Die in diesem Beispiel berechneten Zweige durch nicht-isolierte Lösungen dienen natürlich auch als Beispiele für das in Abschnitt 2.8 geschilderte Vorgehen der Verfolgung von Zweigen durch Umkehrpunkte.

6.5 BEISPIEL 4 - NUMERISCHE BEHANDLUNG SEKUNDÄRER VERZWEIGUNG

Von PIMBLEY [1] stammt folgendes Beispiel einer Hammersteinschen Integralgleichung

$$(17) \quad \lambda u(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} ((3 \sin t \sin s + 2 \sin 2t \sin 2s)(u(t) + u(t)^3) dt, \\ 0 \leq s \leq \pi.$$

Neben der trivialen Lösung $u^0 = 0$ besitzt (17) die nicht-trivialen Lösungen

$$\begin{aligned} u^1(\lambda; t) &= \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\lambda}{3} - 1} \sin t \\ u^2(\lambda; t) &= \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\lambda}{2} - 1} \sin 2t \\ u_+^3(\lambda; t) &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} \lambda - 1} \sin t \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{6} - 1} \sin 2t \\ u_-^3(\lambda; t) &= -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} \lambda - 1} \sin t \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{6} - 1} \sin 2t \end{aligned}$$

u^1 verzweigt von $u^0 = 0$ bei $\lambda = 3$, u^2 verzweigt von $u^0 = 0$ bei $\lambda = 2$, u_+^3 verzweigt von u^1 bei $\lambda = 6$. Wir interessieren uns hier für die sekundäre Verzweigung in $(u, \lambda) = (\frac{2}{\sqrt{3}} \sin t, 6)$. Die Verhältnisse in $(-\frac{2}{\sqrt{3}} \sin t, 6)$ sind spiegelbildlich zu diesem Fall.

Die Integralgleichung (17) kann leicht in ein System von 5 gewöhnlichen Differentialgleichungen transformiert werden, vgl. SEYDEL [1]. u entspricht dann u_1 . Das System lautet

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{6}{\pi \lambda} \cos t (u_2 + u_3) + \frac{8}{\pi \lambda} \cos 2t (u_4 + u_5) \\ u_2' &= (u_1 + u_1^3) \sin t \\ (18a) \quad u_3' &= -(u_1 + u_1^3) \sin t \\ u_4' &= (u_1 + u_1^3) \sin 2t \\ u_5' &= -(u_1 + u_1^3) \sin 2t \end{aligned}$$

Hinzu kommen die Randbedingungen

$$(18b) \quad u_1(0) = u_2(0) = u_3(\pi) = u_4(0) = u_5(\pi) = 0.$$

Die Überbestimmte RWA (5.23) zur Bestimmung des Verzweigungspunktes berechnet sich leicht zu

$$\begin{aligned}
 v_1' &= \frac{5}{\pi v_{16}} \cos t (v_2 + v_3) + \frac{8}{\pi v_{16}} \cos 2t (v_4 + v_5) \\
 v_2' &= (v_1 + v_1^3) \sin t \\
 v_3' &= -(v_1 + v_1^3) \sin t \\
 v_4' &= (v_1 + v_1^3) \sin 2t \\
 v_5' &= -(v_1 + v_1^3) \sin 2t \\
 v_6' &= \frac{6}{\pi v_{16}} \cos t (v_7 + v_8) + \frac{8}{\pi v_{16}} \cos 2t (v_9 + v_{10}) \\
 v_7' &= v_6 (1 + 3v_1^2) \sin t \\
 v_8' &= -v_6 (1 + 3v_1^2) \sin t \\
 v_9' &= v_6 (1 + 3v_1^2) \sin 2t \\
 v_{10}' &= -v_6 (1 + 3v_1^2) \sin 2t \\
 v_{11}' &= \frac{6}{\pi v_{16}} \cos t (v_{12} + v_{13}) + \frac{8}{\pi v_{16}} \cos 2t (v_{14} + v_{15}) \\
 &\quad - \frac{6}{\pi v_{16}^2} \cos t (v_2 + v_3) - \frac{8}{\pi v_{16}^2} \cos 2t (v_4 + v_5) \\
 v_{12}' &= v_{11} (1 + 3v_1^2) \sin t \\
 v_{13}' &= -v_{11} (1 + 3v_1^2) \sin t \\
 v_{14}' &= v_{11} (1 + 3v_1^2) \sin 2t \\
 v_{15}' &= -v_{11} (1 + 3v_1^2) \sin 2t \\
 v_{16}' &= 0 \\
 v_{17}' &= v_6^2 + v_7^2 + v_8^2 + v_9^2 + v_{10}^2 \\
 v_{18}' &= v_6 v_{11} + v_7 v_{12} + v_8 v_{13} + v_9 v_{14} + v_{10} v_{15}
 \end{aligned}
 \tag{19a}$$

mit Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 v_1(0) &= v_2(0) = v_3(\pi) = v_4(0) = v_5(\pi) = 0, \\
 v_6(0) &= v_7(0) = v_8(\pi) = v_9(0) = v_{10}(\pi) = 0, \\
 v_{11}(0) &= v_{12}(0) = v_{13}(\pi) = v_{14}(0) = v_{15}(\pi) = 0, \\
 v_{17}(0) &= 0, \quad v_{17}(\pi) = 1, \quad v_{13}(0) = v_{18}(\pi) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{19b}$$

Dabei entsprechen $v_1, \dots, v_5$ den Komponenten von u ,
 $v_6, \dots, v_{10}$ denen von p_1 und $v_{11}, \dots, v_{15}$ denen von q_1 ;
 $v_{16} \hat{=} \lambda$, $v_{17} \hat{=} \mu_1$, $v_{18} \hat{=} \mu_2$.

Die RWA (5.33) lautet hier

$$\begin{aligned}
 v_1^i = & \frac{6}{\pi \lambda^*} \cos t (v_2 + v_3) + \frac{\varepsilon}{\pi \lambda^*} \cos 2t (v_4 + v_5) \\
 & - \left[\frac{6}{\pi \lambda^* 2} \cos t (u_2^* + u_3^*) + \frac{\varepsilon}{\pi \lambda^* 2} \cos 2t (u_4^* + u_5^*) \right] v_6 \\
 & - \left[\frac{6}{\pi \lambda^* 2} \cos t \{v_7(p_1^2 + q_1^3) + v_8(q_1^2 + q_1^3) + \varepsilon(v_2 + v_3)\} \right. \\
 & \left. + \frac{8}{\pi \lambda^* 2} \cos 2t \{v_7(p_1^4 + p_1^5) + v_8(q_1^4 + q_1^5) + \varepsilon(v_4 + v_5)\} \right] \times \\
 & \times (v_7 p_2 + v_8 q_2 + \varepsilon v_6) + \left[\frac{\varepsilon}{\pi \lambda^* 3} \cos t (u_2^* + u_3^*) \right. \\
 & \left. + \frac{8}{\pi \lambda^* 3} \cos 2t (u_4^* + u_5^*) \right] (v_7 p_2 + v_8 q_2 + \varepsilon v_6)^2 \\
 & + R(v_2, v_3, v_4, v_5, v_6; \varepsilon)
 \end{aligned}
 \tag{20a}$$

$$\begin{aligned}
 v_2^i &= q_1, \quad v_3^i = -q_1, \quad v_4^i = q_2, \quad v_5^i = -q_2, \\
 v_6^i &= v_7^i = v_8^i = 0, \\
 v_9^i &= p_1^1 v_1 + p_1^2 v_2 + p_1^3 v_3 + p_1^4 v_4 + p_1^5 v_5 + p_2 v_6 \\
 v_{10}^i &= q_1^1 v_1 + q_1^2 v_2 + q_1^3 v_3 + q_1^4 v_4 + q_1^5 v_5 + q_2 v_6
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 Q_j = & \sin jt \left[(1 + 3u_1^{*2}) v_1 + 3u_1^* \{v_7 p_1^1 + v_8 q_1^1 + \varepsilon v_1\}^2 \right. \\
 & \left. + \varepsilon \{v_7 p_1^1 + v_8 q_1^1 + \varepsilon v_1\}^3 \right]
 \end{aligned}$$

und Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 v_1(0) &= v_2(0) = v_3(\pi) = v_4(0) = v_5(\pi) = v_9(0) = v_9(\pi) = 0 \\
 v_{10}(0) &= v_{10}(\pi) = 0, \quad v_7(0)^2 + v_8(0)^2 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

und einem geeigneten Restglied R . p_1^i und q_1^i sind die Komponenten der Nullvektoren p_1 und q_1 zu u^* und λ^* .

a) Bestimmung des Verzweigungspunktes

Auf die überbestimmte RLA (19) wurde das Shooting - Verfahren in der Modifikation nach 5.2.2 angewandt. Zur Integration der auftretenden Anfangswertprobleme haben wir das klassische Runge - Kutta - Verfahren der Ordnung 4 (Rechnung in doppelter Genauigkeit ≈ 18 Dezimalstellen) benutzt. Die Minimierung des Funktionals g wurde mit dem modifizierten Levenberg - Marquardt - Algorithmus, vgl. Abschnitt 5.2.1, durchgeführt (einfache Genauigkeit ≈ 8 Dezimalstellen). In folgender Tabelle sind die mit verschiedenen Schrittweiten h (des Runge - Kutta - Verfahrens) erzielten Ergebnisse wiedergegeben. Der Vektor der Startwerte war

$$s^0 = (0, 0, 2, 0, 2, 0, 0, -1.5, 0, -1.7, 0, 2, 0, 2, 10, 0, 0)^T.$$

	$h = \pi/50$	$h = \pi/100$	$h = \pi/200$
$v_3(0)$	3.6275734	3.6275972	3.6275986
$v_{10}(0)$	$-6.0287568 \cdot 10^{-1}$	$-6.0287566 \cdot 10^{-1}$	$-6.0287566 \cdot 10^{-1}$
$v_{13}(0)$	1.2091972	1.2091994	1.2091996
$v_{16}(0)$	5.9999800	5.9999987	6.0000000

In unsere Tabelle sind nur diejenigen Komponenten von $v(0)$ aufgenommen, die ungleich Null sind. Die übrigen Werte liegen in der Größenordnung von 10^{-7} ($h = \pi/50$) bis 10^{-10} ($h = \pi/200$) und geben die erzielbare Grenzgenauigkeit an. Auf dem Gitter mit $h = \pi/200$ erhält man als v_1 die Werte von $u^1(6,.)$ praktisch exakt innerhalb der Stellenzahl (8 Dezimalstellen). v_6 lieferte eine ausgezeichnete Approximation für $c_1 \sin 2t$, v_{11} für $c_2 \sin t$, $c_i \neq 0$ Konstanten. Die Werte in obiger Tabelle geben die Konvergenzordnung 4 empirisch recht gut wieder, wenn man die Ergebnisse für $h = \pi/200$ als exakt ansieht. Für $h = \pi/100$ wurden 30 Levenberg - Marquardt - Iterationsschritte benötigt und 299 Anfangswertprobleme inte-

griert. Bei den anderen Schrittweiten ergaben sich ähnliche Zahlen.

b) Berechnung der Zweige durch den Verzweigungspunkt

Unter Verwendung der Ergebnisse aus a) wurde die RWA (20) zur Bestimmung der beiden sich in $(u, \lambda) = (\frac{2}{3} \sin t, 6)$ schneidenden Zweige numerisch mit Hilfe des Shooting - Verfahrens gelöst. Die Integration der Anfangswertprobleme wurde wie in a) mit dem Runge - Kutta - Verfahren vorgenommen. Zur Auflösung des nichtlinearen Gleichungssystems für die Anfangswerte benutzten wir der Einfachheit halber auch das Levenberg - Marquardt - Verfahren. Beim Runge - Kutta - Verfahren (doppelte Genauigkeit) wurde jeweils die doppelte Schrittweite gegenüber der Berechnung des Verzweigungspunktes verwendet, um bei den numerisch berechneten Größen u^* , p_1 und q_1 nicht interpolieren zu müssen.

Wir geben hier die numerischen Resultate für $h = \pi/100$ wieder, d.h. der Verzweigungspunkt wurde mit $h = \pi/200$ berechnet, vgl. a).

(i) primärer Zweig (u^1)

In Tabelle 4 sind die Ergebnisse für verschiedene $\epsilon \in [-0.3, +0.3]$ wiedergegeben. $\alpha(\epsilon)$, $\beta(\epsilon)$, $u_1(\epsilon; .)$, $\lambda(\epsilon)$ bezeichnen hier die mit dem Shooting - Verfahren berechneten Werte. $u(\lambda(\epsilon), .)$ bezeichnet die exakte Lösung von (17), berechnet an der Stelle $\lambda(\epsilon)$. Diese Werte sind als Genauigkeitstest berechnet worden. Sie zeigen ausgezeichnete Übereinstimmung mit den numerischen Resultaten.

(ii) sekundärer Zweig (u_+^3)

Für Tabelle 5 gilt entsprechend das oben gesagte. Zwischen $u_1(\epsilon; \pi/4)$ und $u(\lambda(\epsilon), \pi/4)$ zeigen sich hier gewisse Diskrepanzen. Diese deuten jedoch nicht auf größere Fehler hin. Sie rühren vielmehr von der Tatsache her, daß durch den unvermeidbaren kleinen Fehler in $\lambda(\epsilon)$ (≈ 6) wegen des Faktors $\sqrt{\lambda/6 - 1}$ in der Darstellung von u_+^3 große Störungen in $u(\lambda(\epsilon), \pi/4)$ entstehen. Nichtsdestoweniger sind unsere Ergebnisse auch hier sehr genau, wie auch der Vergleich zwischen $u_1(\epsilon; \pi/2)$ und $u(\lambda(\epsilon), \pi/2)$ zeigt (wo der zweite Term von u_+^3

Tabelle 4: Primärer Zweig

ε	0	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3
$\alpha(\varepsilon)$	2.2632415E-9	-1.1330778E-5	-2.2710034E-5	-1.1537852E-4	-2.3516256E-4	-4.8702478E-4	-7.5387928E-4
$\beta(\varepsilon)$	1.0000000	1.0000000	1.0000000	9.9999999E-1	9.9999997E-1	9.9999988E-1	9.9999971E-1
$\lambda(\varepsilon)$	6.0000000	6.0049992	6.0099975	6.0499436	6.0997758	6.1991079	6.2980026
$u_1(\varepsilon; \frac{\pi}{4})$	8.1649655E-1	8.1717660E-1	8.1785593E-1	8.2326499E-1	8.2996328E-1	8.4315649E-1	8.5608964E-1
$u(\lambda(\varepsilon), \frac{\pi}{4})$	8.1649655E-1	8.1717660E-1	8.1785594E-1	8.2326499E-1	8.2996329E-1	8.4315649E-1	8.5608964E-1
$u_1(\varepsilon; \frac{\pi}{2})$	1.1547005	1.1556622	1.1566230	1.1642725	1.1737453	1.1924033	1.2106936
$u(\lambda(\varepsilon), \frac{\pi}{2})$	1.1547005	1.1556622	1.1566230	1.1642725	1.1737453	1.1924033	1.2106936
ε		-0.005	-0.01	-0.05	-0.1	-0.2	-0.3
$\alpha(\varepsilon)$		1.1288831E-5	2.2528634E-5	1.1073421E-4	2.1655586E-4	4.1234537E-4	5.8494208E-4
$\beta(\varepsilon)$		1.0000000	1.0000000	9.9999999E-1	9.9999998E-1	9.9999992E-1	9.9999988E-1
$\lambda(\varepsilon)$		5.9949991	5.9899975	5.9499433	5.8997737	5.7990918	5.6979484
$u_1(\varepsilon; \frac{\pi}{4})$		8.1581577E-1	8.1513427E-1	8.0965608E-1	8.0274165E-1	7.8868270E-1	7.7430232E-1
$u(\lambda(\varepsilon), \frac{\pi}{4})$		8.1581576E-1	8.1513428E-1	8.0965607E-1	8.0274265E-1	7.8868270E-1	7.7430232E-1
$u_1(\varepsilon; \frac{\pi}{2})$		1.1537377	1.1527740	1.1450266	1.1352481	1.1153658	1.0950288
$u(\lambda(\varepsilon), \frac{\pi}{2})$		1.1537377	1.1527739	1.1450266	1.1352481	1.1153658	1.0950288

E-5 bedeutet 10^{-5} etc.

Tabelle 5: Sekundärer Zweig

ε	0	0.005	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3
$\alpha(\varepsilon)$	-1.0000000	-9.9999951E-1	-9.9999804E-1	-9.9995101E-1	-9.9980487E-1	-9.9922860E-1	-9.9829118E-1
$\beta(\varepsilon)$	2.0007474E-8	9.9148386E-4	1.9826455E-3	9.8991619E-3	1.9754063E-2	3.9270725E-2	5.8435520E-2
$\lambda(\varepsilon)$	6.0000000	6.0000053	6.0000218	6.0005512	6.0022004	6.0087484	6.0195225
$\gamma(\varepsilon; \frac{\pi}{4})$	8.1649655E-1	8.1713667E-1	8.1777769E-1	8.2293776E-1	8.2946399E-1	8.4274676E-1	8.5629380E-1
$\lambda(\varepsilon), \frac{\pi}{4}$	8.1649655E-1	8.1712363E-1	8.1776782E-1	8.2293639E-1	8.2946304E-1	8.4274629E-1	8.5629355E-1
$\gamma(\varepsilon; \frac{\pi}{2})$	1.1547005	1.1547012	1.1547033	1.1547712	1.1549828	1.1558224	1.1572026
$\lambda(\varepsilon), \frac{\pi}{2}$	1.1547005	1.1547012	1.1547033	1.1547713	1.1549828	1.1558224	1.1572026
ε		-0.005	-0.01	-0.05	-0.1	-0.2	-0.3
$\alpha(\varepsilon)$		-9.9999951E-1	-9.9999804E-1	-9.9995073E-1	-9.9980261E-1	-9.9921070E-1	-9.9823179E-1
$\beta(\varepsilon)$		-9.9172989E-4	-1.9837500E-3	-9.9277585E-3	-1.9868300E-2	-3.9723976E-2	-5.9441561E-2
$\lambda(\varepsilon)$		6.0000053	6.0000218	6.0005527	6.0027133	6.0088490	6.0198600
$\gamma(\varepsilon; \frac{\pi}{4})$		8.1585733E-1	8.1521903E-1	8.1014625E-1	8.0389247E-1	7.9169499E-1	7.7994106E-1
$\lambda(\varepsilon), \frac{\pi}{4}$		8.1587049E-1	8.1522631E-1	8.1014823E-1	8.0389313E-1	7.9169539E-1	7.7994126E-1
$\gamma(\varepsilon; \frac{\pi}{2})$		1.1547012	1.1547033	1.1547715	1.1549844	1.1558354	1.1572458
$\lambda(\varepsilon), \frac{\pi}{2}$		1.1547012	1.1547033	1.1547714	1.1548845	1.1558354	1.1572458

E-5 bedeutet 10^{-5} etc.

verschwindet); natürlich können aber kleine Fehler in $u(\varepsilon)$
und $\lambda(\varepsilon)$ auftreten.

Die Rechnungen wurden auf der Rechenanlagen HB 66/80 des
Rechenzentrums der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz
durchgeführt.

7 LITERATURVERZEICHNIS

ATKINSON, K.E.

- [1] The numerical solution of a bifurcation problem
SIAM J. Numer. Anal. 14, 584 - 599 (1977)

BROWN, K.M., DENNIS, J.E.

- [1] Derivative free analogues of the Levenberg -
Marquardt and Gauß algorithms for nonlinear least
squares approximation, Numer. Math. 18, 289 - 297
(1972)

CHOW, S.-N., HALE, J.K., MALLET-PARET, J.

- [1] Applications of generic bifurcation. I, Arch.
Rational Mech. Anal. 59, 159 - 189 (1975)
- [2] Applications of generic bifurcation. II, Arch.
Rational Mech. Anal. 62, 209 - 235 (1976)

COHEN, D.S.

- [1] Multiple solutions of nonlinear partial differential
equations, in: STAKGOLD, I., JOSEPH, D. SATTINGER, D.,
Eds., Nonlinear problems in the physical sciences
and biology, Proceedings of a Satellite Summer Institute,
Seattle, July 3-28, 1972; Springer, Berlin (1973)
Lecture Notes in Mathematics, 322

COLLATZ, L.

- [1] Funktionalanalysis und Numerische Mathematik,
Springer, Berlin (1964)

CRANDALL, M.G.

- [1] An introduction to constructive aspects of bifurcation
and the implicit function theorem, in:
RABINOWITZ, P.H. [1]

CRANDALL, M.G., RABINOWITZ, P.H.

- [1] Bifurcation from simple eigenvalues, J. Functional
Anal. 8, 321 - 340 (1971)
- [2] Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and
linearized stability, Arch. Rational Mech. Anal. 52,
161 - 180 (1973)

DEMOULIN, Y.-M.J., CHEN, Y.M.

- [1] An iteration method of solving nonlinear eigenvalue
problems, SIAM J. Numer. Anal. 28, 588 - 595 (1975)

- [2] An iteration method for studying the bifurcation of solutions of the nonlinear equations,
 $L(\lambda)u + \varepsilon R(\lambda, u) = 0$, Numer. Math. 23, 47 - 61 (1974)

DIEUDONNÉ, J.

- [1] Foundations of modern analysis, Academic Press, New York (1960)

DREXLER, F.-J.

- [1] Eine Methode zur Berechnung sämtlicher Lösungen von Polynomgleichungssystemen, Numer. Math. 29, 45 - 58 (1977)

GLASS, L.

- [1] Combinatorial and topological methods in nonlinear chemical kinetics, J. Chem. Physics 63, 1325 - 1335 (1975)

KALABA, R. E., SPINGARN, K.

- [1] Postbuckling beam configurations via an embedding method, Comp. & Maths. with Appls. 4, 1 - 10 (1978)

KATO, T.

- [1] Perturbation theory for linear operators, Springer, New York (1960)

KEENER, J.P.

- [1] Perturbed bifurcation theory at multiple eigenvalues, Arch. Rational Mech. Anal. 56, 348 - 366 (1974)
 [2] Buckling imperfection sensitivity of columns and spherical caps, Quarterly of Appl. Math. 32, 173 - 188 (1974)

KEENER, J.P., KELLER, H.B.

- [1] Perturbed bifurcation theory, Arch. Rational Mech. Anal. 50, 159 - 175 (1974)

KELLER, H.B.

- [1] Accurate difference methods for linear ordinary differential systems subject to linear constraints, SIAM J. Numer. Anal. 6, 8 - 30 (1969)
 [2] Accurate difference methods for nonlinear two - point boundary value problems, SIAM J. Numer. Anal. 11, 305 - 320 (1974)
 [3] Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, in: RABINOWITZ, P.H. [1]

KELLER, H.B., LANGFORD, W.T.

- [1] Iterations, perturbations and multiplicities for nonlinear bifurcation problems, Arch. Rational Mech. Anal. 48, 83 - 108 (1972)

KELLER, H.B., WHITE, A.B.Jr.

- [1] Difference methods for boundary value problems in ordinary differential equations, SIAM J. Numer. Anal. 12, 791 - 802 (1975)

KIKUCHI, F.

- [1] An iterative finite element scheme for bifurcation analysis of semi - linear elliptic equations, Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Report Nr. 542 (Vol. 41, No.6) (1976)

KOLODNER, I.I.

- [1] Heavy rotating string - a nonlinear eigenvalue problem, Comm. Pure Appl. Math. 8, 395 - 408 (1955)

KRASNOSELSKII, M.A. et al.

- [1] Approximate solution of operator equations, Walters - Noordhoff, Groningen (1972)

KREISS, H.-O.

- [1] Difference approximations for boundary and eigenvalue problems for ordinary differential equations, Math. Comp. 26, 605 - 624 (1972)

LANGFORD, W.T.

- [1] A shooting algorithm for the best least squares solution of two - point boundary value problems, SIAM J. Numer. Anal. 14, 527 - 542 (1977)
- [2] Numerical solution of bifurcation problems for ordinary differential equations, Numer. Math. 28, 171 - 190 (1977)

LENTINI, M., PEREYRA, V.

- [1] A variable order finite difference method for nonlinear two - point boundary value problems, Math. Comp. 28, 981 - 1003 (1974)

MARSDEN, J.E., MCCracken, M.

- [1] The Hopf bifurcation and its applications, Springer, New York (1976)

MEYER - SPASCHE, R.

- [1] Numerische Behandlung von elliptischen Randwertproblemen mit mehreren Lösungen und von MHD - Gleichgewichtsproblemen, IPP 6/141, Max Planck - Institut für Plasma-physik, Garching bei München (1975)

ORTEGA, J.M., RHEINBOLDT, W.C.

- [1] Iterative solution of nonlinear equations in severable variables, Academic Press, New York, London (1970)

PIMBLEY, G.H.Jr.

Eigenfunction branches of nonlinear operators, and their bifurcations, Springer, Berlin, Lecture Notes in Mathematics 104 (1969)

RABINOWITZ, P.H., (Ed.)

Applications of bifurcation theory, Proceedings of an advanced seminar conducted by the Mathematics Research Center, The University of Wisconsin at Madison, 1976, Academic Press, New York, London (1977)

REID, W.T.

- [1] Ordinary differential equations, Wiley & Sons, New York (1971)
- [2] Generalized Green's matrices for two - point boundary problems, SIAM J. Appl. Math. 15, 856 - 870 (1967)

REISS, E.L.

- [1] Column buckling - an elementary example of bifurcation, in: KELLER, J.B., ANTMANN, S., Eds.: Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems, Benjamin, New York (1969)
- [2] Imperfect bifurcation, in: RABINOWITZ, P.H. [1]

RHEINBOLDT, W.C.

- [1] Numerical methods for a class of finite dimensional bifurcation problems, SIAM J. Numer. Anal. 15, 1 - 11 (1978)
- [2] Numerical continuation methods for finite element applications, in : BATHE, K.-J., ODEN, J.T., WUNDERLICH, W., Eds.: Formulations and computational algorithms in Finite Element analysis, US - Germany Symposium, Massachusetts Institute of Technology (1977)

SCHEURLE, J.

- [1] Ein selektives Projektions - Iterationsverfahren und Anwendungen auf Verzweigungsprobleme, Numer. Math. 29, 11 - 35 (1977)

SCHRÖDER, J.

- [1] Störungsrechnung bei Eigenwert- und Verzweigungsaufgaben, Arch. Rational Mech. Anal. 1, 436 - 468 (1957)

SEYDEL, R.

- [1] Numerische Berechnung von Verzweigungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, ZAMM - MATH - 7736, Technische Universität zu München

SIMPSON, R.B.

- [1] Finite difference methods for mildly nonlinear eigenvalue problems, SIAM J. Numer. Anal. 8, 190 - 211 (1971)

STAKGOLD, I.

- [1] Branching of solutions of nonlinear equations, SIAM REVIEW 13, 289 - 332 (1971)

STOER, J., BULIRSCH, R.

- [1] Einführung in die Numerische Mathematik II, Springer, Berlin, Heidelberger Taschenbücher 114 (1973)

WAINBERG, M.M., TRENIGIN, W.A.

- [1] Theorie der Lösungsverzweigung bei nichtlinearen Gleichungen, Akademie - Verlag, Berlin - Ost (1973)

WEBER, H.

- [1] A - posteriori - Fehlerabschätzungen und - Existenzaussagen bei der Lösung von gewöhnlichen Randwertaufgaben mit einem Differenzenverfahren, ZAMM 57, T310 - 312 (1977)

WERNER, W.

- [1] Über ein Verfahren der Ordnung $1 + \sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung, Mainz (1978), zur Veröffentlichung eingebracht.

WEISS, R.

- [1] Bifurcation in difference approximations to two - point boundary value problems, Math. Comp. 29, 746 - 760 (1975)
- [2] The convergence of shooting methods, BIT 13, 470 - 475 (1973)

LEBENS LAUF

5.10.1948	geboren in Wiesbaden als Sohn des kaufm. Angestellten Karl Weber und seiner Ehefrau Dora, geb. Moses.
1955 - 1959	Besuch der Grundschule in Wiesbaden
1959 - 1967	Besuch des Leibniz - Gymnasiums in Wiesbaden
Juli 1967	Reifeprüfung bestanden
Juli 67 - Sept. 68	Grundwehrdienst in Schwarzenborn und Wetzlar
Seit Okt. 1968	Studium der Mathematik und Physik, seit 1974 auch Volkswirtschaftslehre, an der Johannes Gutenberg - Universität Mainz
November 1970	Diplom - Vorprüfung in Mathematik
März 1974	Diplom - Prüfung in Mathematik, Nebenfach Physik
23.4.74 - 31.3.78	wiss. Mitarbeiter am FB 17 Mathematik der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz
28.12.1976	Eheschließung mit Maria Elisabeth Weber, geb. Schneider, aus Koblenz
13.6.1977	Geburt meiner Tochter Tanja
Seit 1.4.1978	Assistent an der Abteilung Mathematik der Universität Dortmund



